

Hans Block

Sfärer, polyedrar, bollar och skönhet

1 Inledning

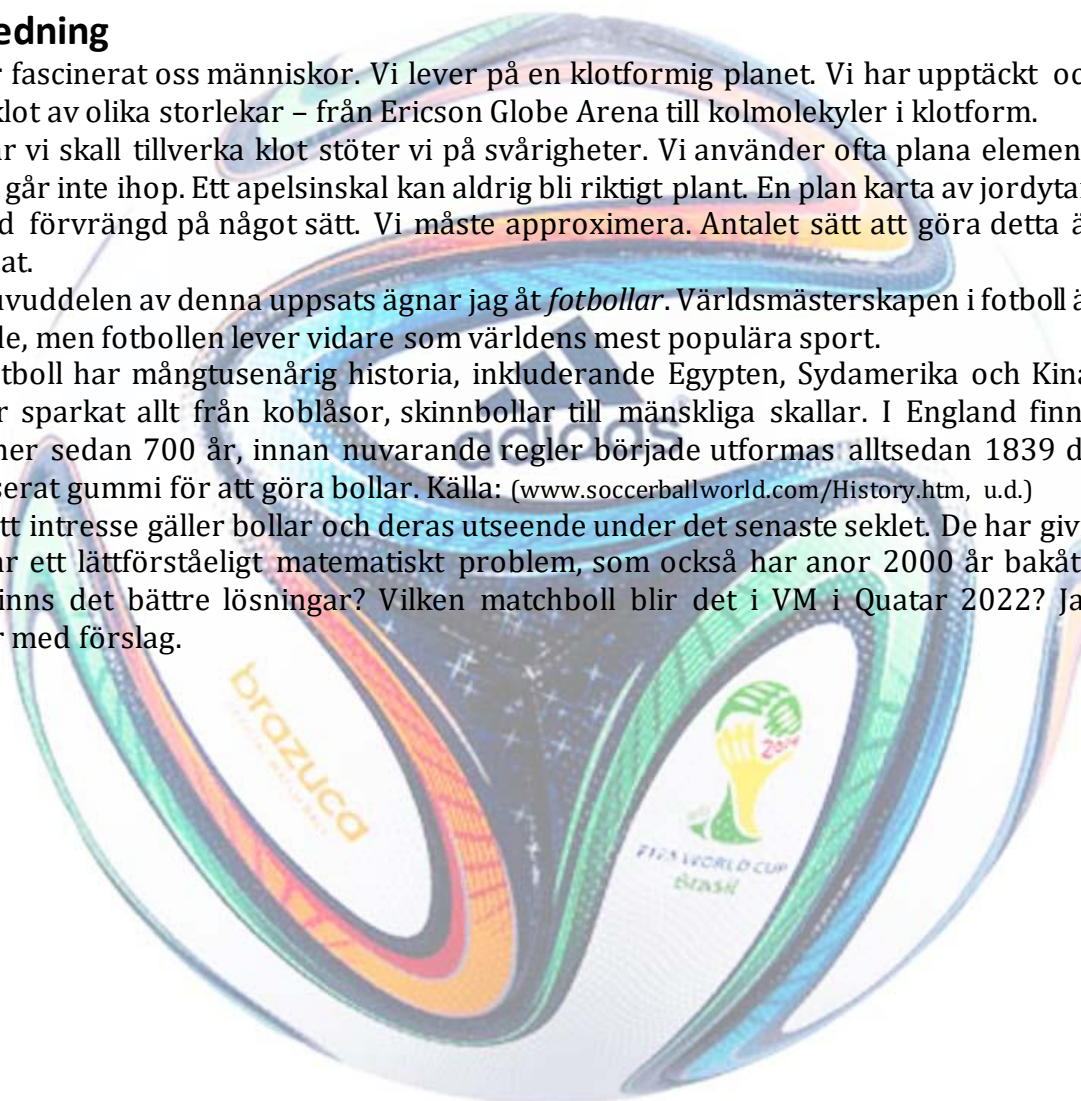
Klot har fascinerat oss människor. Vi lever på en klotformig planet. Vi har upptäckt och skapat klot av olika storlekar – från Ericson Globe Arena till kolmolekyler i klotform.

När vi skall tillverka klot stöter vi på svårigheter. Vi använder ofta plana element, men det går inte ihop. Ett apelsinskal kan aldrig bli riktigt plant. En plan karta av jordytan blir alltid förvrängd på något sätt. Vi måste approximera. Antalet sätt att göra detta är begränsat.

Huvuddelen av denna uppsats ägnar jag åt *fotbollar*. Världsmästerskapen i fotboll är avslutade, men fotbollen lever vidare som världens mest populära sport.

Fotboll har mångtusenårig historia, inkluderande Egypten, Sydamerika och Kina. Man har sparkat allt från kobblåsor, skinnbollar till mänskliga skallar. I England finns traditioner sedan 700 år, innan nuvarande regler började utformas alltsedan 1839 då vulkaniserat gummi för att göra bollar. Källa: (www.soccerballworld.com/History.htm, u.d.)

Mitt intresse gäller bollar och deras utseende under det senaste seklet. De har givit lösningar ett lättförståeligt matematiskt problem, som också har anor 2000 år bakåt i tiden. Finns det bättre lösningar? Vilken matchboll blir det i VM i Qatar 2022? Jag kommer med förslag.



Bilden föreställer VM-bollen Brazuca från 2014, enligt min mening en av de vackraste fotbollar som någonsin gjorts.

Hans Block
2019-05-27

Innehåll

1	Inledning.....	1
2	Från kolmolekyler till 100-metershus	5
2.1	Kolmolekyler	5
2.2	Radioteleskop	6
2.3	Sfäriska hus.....	7
2.4	Bollar.....	7
3	Matematiska resultat	8
3.1	Platons och Arkimedes' kroppar.....	8
3.2	Sidor, kanter och hörn.....	8
3.3	Dubbelkrökta ytor.....	9
3.4	Symmetrigrupper	10
3.5	Rundhet.....	11
3.6	Lika omkrets-problemet.....	12
3.7	Mycket runda polyedrar.....	13
3.8	Gränser för polyedrars rundhet.....	14
3.9	Smala strimmor	15
3.10	Uppblåsbara figurer.....	16
3.11	Sammanfattning	16
4	Krav på bollar	17
4.1	Runda.....	17
4.2	Isotropa.....	17
4.3	Lagom sträva.....	17
4.4	Studsas bra.....	17
4.5	Lika under hela matchen.....	17
4.6	Långa skott.....	17
4.7	Förutsebar bana.....	17
4.8	Lätta att se.....	17
4.9	Skona spelarna.....	17
4.10	Ge många mål.....	17
5	Jämförelsemått.....	18
5.1	Rundhet.....	18
5.2	Panelbredd.....	18
5.3	Sömmarnas längd.....	18
5.4	Paneler per hörn.....	18
6	Bollars fysiska egenskaper.....	18
6.1	Aerodynamik.....	18
6.2	Ytstruktur	21
6.3	Tillslag och isotropism.....	21
7	Tidigare bollar och deras symmetrier	22
7.1	Disposition.....	22
7.3	Rotationssymmetrier	23
7.4	Tetraedersymmetrier	29
7.5	Kubiska symmetrier	31
7.6	Dodekaedersymmetrier	40
8	Tänkbara matchbollar till VM 2022	44

Hans Block
2019-05-27

8.1	Måla om gamla bollar.....	44
8.2	Ändra parametrar.....	44
8.3	Arkimediska och andra kroppar.....	44
8.4	Grupper utan speglingar.....	48
8.5	Aerodynamisk utformning.....	53
8.6	Färga paneler.....	53
8.7	Skönhet och nytta.....	53
9	Sammanfattning av förslag.....	56
10	Referenser.....	57
11	Några bollars egenskaper.....	59

2 Från kolmolekyler till 100-metershus

Människor har dragits till klotformen på många sätt. Vi tar upp några tillämpningar.

2.1 Kolmolekyler

Kristaller kan se ut på olika sätt. Vissa *kolmolekyler* har samma symmetrigrupper som vanliga fotbollar.

Fulleren är en av de fyra kristallina former av kol (de andra är diamant, grafen och grafit). Hit hör nanorör och C-60 som har samma struktur som Telstar-bollen i Figur 42.



Figur 1. Ett nödvändigt villkor för en stabil kolmolekyl är att varje kolatom, som markeras av ett hörn i figuren, har fyra streck till intilliggande hörn. Detta fungerar i den fotbollslänkande fullerenen. Denna komplicerade molekyl har syntetiserats i laboratorier, men den finns också i vanligt sot.

Man har också hittat fullerener med tetraeder-symmetri. I år (2018) har man också funnit tänkbara kolmolekyler med kubisk symmetri, även om man ännu inte tillverkat dem, se (medium.com/the-physics-arxiv-blog, 2018) eller originalartikeln (Fan, 2018). Sådana kristaller innehåller kolringar med 4 eller 8 kolatomer. Ännu har man inte funnit någon molekylstruktur som är lika rund som den bästa fotbollen med kubisk symmetri, Brazucan i Figur 32.

Hans Block
2019-05-27

2.2 Radioteleskop

Approximation av sfärer med polyedrar används också för *radomer*, eng. *domes*, klotformiga kupoler som skydd för radioteleskop. Här behövs endast formen, men inte mycket symmetri, för kupolerna står fasta på marken runt ett vridbart instrument. Man måste i stället beakta tyngdlagen och hållfastheten hos konstruktionen. Trianglarna kan inte vara liksidiga. Se Figur 2.



Figur 2. Cryptologic Operations Center, Misawa, Japan. Så oregelbundna mönster behövs inte.

2.3 Sfäriska hus

Världens största klotformiga hus är *Globen* (officiellt Ericsson Globe). Den har en utvändigt diameter av 110,40 meter.

Approximation av klot med polyedrar görs alltså för klot av storleksordning från någon nanometer till 100 meter.



Figur 3. Globen. Bild Wikipedia, Globen, Arild Vågen - Eget arbete.

2.4 Bollar

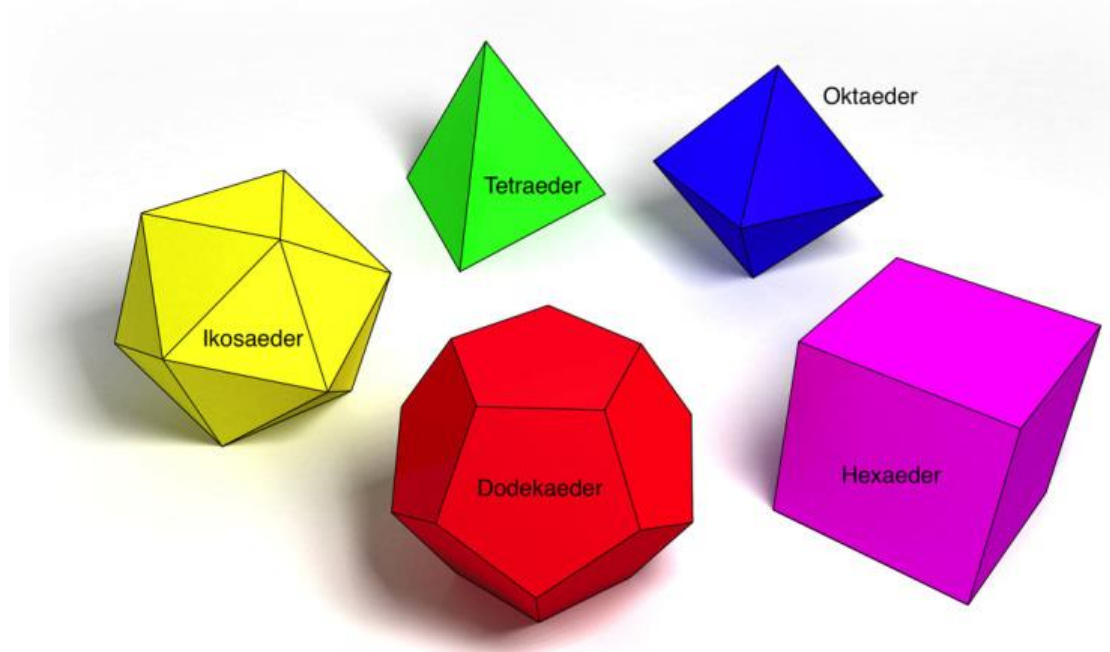
Många har ägnat sig åt att samla på bollars utseenden, t.ex. (Swart, 2015). Resten av artikeln skall ägnas åt *bollar*, inte bara fotbollar utan också bollar från andra idrottsgrenar. Vi skall gå igenom några kända bollar och visa hur de har byggts upp av plana paneler och tala om hur symmetriska de är och hur de dekorerats. Till slut skall jag komma med förslag till nästa VM-boll.

Men innan dess talar jag om de matematiska förutsättningarna och refererar några resultat om sfärer och deras approximation av polyedrar.

3 Matematiska resultat

3.1 Platons och Arkimedes' kroppar

Kunskapen om nästan regelbundna kroppar med nära klotform går tillbaka till antiken. Redan Platon kände till nedanstående kroppar, de enda där liksidiga månghörningar möts i kongruenta hörn. De fem kropparna var *tetraedern* med 4 trianglar, *kuben* med 6 kvadrater, *oktaedern* med 8 trianglar, *dodekaedern* med 12 femhörningar, och *ikosaedern* med 20 trianglar.



Figur 4. De platonska kropparna. Bild: isabelleklund.wordpress.com/2017/04/21/platonska-kroppar/

Arkimedes hittade övriga kroppar där regelbundna månghörningar möts i kongruenta hörn. Beviset för att Arkimedes kroppar är de enda som uppfyller detta villkor är inte svårt: Man behöver bara titta på ett hörn och räkna vilka reguljära månghörningar som ryms inom vinkeln 360° .

Några av Arkimedes kroppar avbildas nedan i uppsatsen. Samtliga finns på (Wikipedia, Arkimediska kroppar, 2014). Jag använder en något avvikande terminologi. Kroppar, arkimediska eller ej, som saknar speglingssymmetri, kallar jag *skeva*. En vanlig term är annars *trubbig*, eng. *snub*. Jag vill inte använda detta ord, för det ger associationer till *mera rund*, vilket kanske är sant, men för vilket jag inte har något bevis.

Den hittills vanligaste fotbollen, vars sidor är femhörningar och sexhörningar, är en arkimedisk kropp. Inte bara spelet fotboll, utan också bollarnas form har en tvåtusenårig historia.

3.2 Sidor, kanter och hörn

Bollar approximeras av polyedrar, och vi skall räkna antalet sidor, kanter och hörn (eng. *faces, edges, vertices*) för varje polyeder. Sidorna är det viktigaste måttet på hur komplex polyedern är. Antalet sidor och deras längder var viktiga när fotbollarna skulle sys ihop av barnarbetare i Pakistan. Hörnen var viktiga, för där var bollen hårdast. Det finns ett samband mellan antalen sidor, F , kanter, E och hörn V :

$$F + V = E + 2$$

Likheten kallas *Eulers relation* efter matematikern Leonhard Euler, 1707 – 1783.

Kolla gärna exemplen i tabellen i avsnitt 11. Se också beviset i (enwikipedia, 2018): Man utgår ifrån en polyeder, tar bort en sida, så $F + V - E$ minskar med 1. Sedan lägger man till kanter, så att alla sidorna blir rektanglar, och uttrycket $F + V - E$ blir oförändrat. Därefter tar man bort triangel efter triangel, tills det bara blir en kvar, och uttrycket förblir oförändrat. För den enda triangeln är det 1. Elegant!

Den här relationen hjälper oss att förstå vilka polyedrar som finns och som kan approximera ett klot. Till exempel gäller: Antag att en polyeder bara består av fem- och sexhörningar (som i Figur 6, Figur 7 eller Figur 8). Då är antalet femhörningar 12.

För låt m vara antalet femhörningar och n antalet sexhörningar. Räkna vi antalet hörn och kanter utgående från sidorna, så räknas varje hörn tre gånger och varje kant två gånger, så

$$\begin{aligned} F &= m + n, \\ V &= (5m + 6n)/3 \\ E &= (5m + 6n)/2 \end{aligned}$$

och relationen $F + V = E + 2$ ger $m = 12$.

Jag vill också berätta något som definitivt inte har med bollar att göra: Eulers relation gäller inte polyedrar som finns på en cykelslang, eller *torus* som matematikerna säger, utan då blir värdet på $F + V - E = 0$. Uttrycket säger någonting om klotets topologiska egenskaper, utan alla symmetrier.



Figur 5. På en cykelslang gäller inte Eulers relation. Bild: (enwikipedia, 2018), Oleg Alexandrov - self-made, with MATLAB.

3.3 Dubbelkrökta ytor

Klotet är en dubbelkrökt yta, ett begrepp infört av den store matematikern Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855. En sådan yta kan inte plattas till utan att deformerar. Detta har vi sett när vi skalar apelsiner eller när vi läste om kartprojektioner i skolan. Skall man anpassa ett klot till plana ytor eller en fotboll till plana stycken av läder, så måste man approximera.

3.4 Symmetrigrupper

En aspekt av rundhet är att man kan vrida och vända på ett klot på oändligt många sätt, och ändå få tillbaka samma kropp. Vi tar några exempel.

En *skalad apelsin* kan vridas lika många gånger som den har klyftor (vi antar att dessa är lika stora), Den ena ändan av apelsinen kan överföras till den andra (2 möjligheter) och dessutom kan apelsinen speglas och ändå vara nästan oförändrad (2 möjligheter). Gruppen av transformationer av apelsiner kallas den *dihedrala* gruppen, och för en apelsin med n klyftor finns

$$4 \cdot n$$

möjligheter, och vi säger att gruppens *ordning* är $4 \cdot n$. En illustration är badbollen i Figur 14.

Det finns två sorters undergrupper till den dihedrala gruppen av given ordning: Den där spegling inte är möjlig, och till pyramidgruppen, där den ena ändan inte kan överföras till den andra.

En *tetraeder* har fyra sidor, som är triangel. Varje sida kan vridas till varje annan sidas plats, vilket ger 4 möjligheter. Därefter kan sidan vridas på 3 sätt utan att tetraedern ändrar läge. Tetraedern kan därefter speglas eller vara oförändrad, 2 möjligheter. Man säger, att *tetraederns symmetrigrupp* har ordningen

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

En *kub* kan vridas så att vilken sida som helst ligger uppåt, 6 möjligheter. Därefter kan man vrida den sidan 90° längs en lodrät axel för att få hörnen på plats, vilket ger 4 möjligheter. Sedan kan man ersätta kuben med dess spegelbild, 2 möjligheter. Därför säger man att kubens symmetrigrupp har ordningen

$$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48.$$

Oktaederns har samma symmetrigrupp som kuben.

Dodekaedern och *ikosaedern* båda har samma symmetrigrupp. De 12 sidorna i en dodekaeder kan alla överföras till varandra, de kan vridas på 5 sätt, och man kan spegla dodekaedern utan att den ändras. Gruppens ordning blir därför

$$12 \cdot 5 \cdot 2 = 120.$$

I själva verket är dessa grupper de enda symmetrigrupperna för en polyeder i det tredimensionella rummet:

Theorem. Any finite subgroup of $SO(3)$ is either a cycle group C_n a dihedral group D_n or one of the groups of a Platonic solid.

(O'Connor, 2003)

Sådant får man lära sig i elementära kurser i algebra. En systematisk framställning av undergrupper till de ändliga tredimensionella symmetrigrupperna finns i (Halbeisen).

Teorin om grupper av symmetrier och avbildningar är från 1800-talet. Någon kanske tycker att det verkar svårt eller onödigt att utreda sådana strukturfrågor. Men det

Hans Block
2019-05-27

är sådant som matematiker gör. De kan lösa ännu svårare problem utan praktisk anknytning, Ett extremt exempel på detta:

Under de senaste åren har man karaktäriserat inte bara symmetrigrupperna i den tredimensionella rymden, utan *alla ändliga grupper*. Eftersom grupper har så få egenskaper – jag räknar inte upp dem – finns det många sorters grupper att välja på. Det har varit en gigantisk insats:

The proof of the theorem consists of tens of thousands of pages in several hundred journal articles written by about 100 authors, published mostly between 1955 and 2004. Gorenstein (d.1992), Lyons, and Solomon are gradually publishing a simplified and revised version of the proof.

en.wikipedia.org/wiki/Finite_group

Under sökandet efter samtliga grupper har man bland annat funnit en monstergrupp:

In the area of modern algebra known as group theory, the Monster group M (also known as the Fischer–Griess Monster, or the Friendly Giant) is the largest sporadic simple group, having order

$$\begin{aligned} & 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 = \\ & = 808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000 \approx \\ & \approx 8 \times 10^{53}. \end{aligned}$$

en.wikipedia.org/wiki/Monster_group

Symmetrigrupperna i tre dimensioner är mycket enklare. Skall man göra symmetriska fotbollar finns det inte mycket att välja på. Deras symmetrigrupper måste vara en undergrupp till någon av de platonska grupperna eller en rotationsgrupp. Genomgången av fotbollar i avsnitt 7 talar om vilken symmetri som bollarna har. Resultaten sammanfattas i en tabell i avsnitt 11.

Om vi nu återgår till bollar och deras krav, så kan vi sammanfatta: Bollar skall likna klot. En egenskap är att man kan vända på ett klot hur som helst och det upptar hela tiden samma plats. En boll borde därför ha en symmetrigrupp av hög ordning. Den klassiska fotbollen med femhörningar och sexhörningar har en symmetrigrupp av ordningen 120. Ändå är detta inte hela sanningen.

3.5 Rundhet

I stället skall vi definiera *rundhet* hos polyedrar. Det finns minst tre olika möjligheter:

Vi kan tänka oss polyedern med ett minimalt omskrivet klot med radie r_o och ett maximalt inskrivet klot med radie r_i och samma mittpunkt. Då är kvoten

$$r_i/r_o$$

ett mått på polyederns rundhet. Definitionsmässigt blir det ett tal mindre än 1.

Ett annat sätt är att mäta hur spetsiga hörnen är. Vi räknar ut summan av vinklarna i grader på de ytor som möts i ett hörn, dividerar med 360. Därmed blir

$$\min(\Sigma\varphi)/360$$

ett mått på rundheten av en polyeder. Även detta mått är definitionsmässigt mindre än 1 och lika med 1 för klotet, men även en ellipsoid får värdet 1.

Det mått som brukar användas är det dimensionslösa måttet:

$$IQ = 36\pi \cdot V^2/A^3,$$

där V är polyederns volym och A arean av dess begränsningsyta. Konstanten är till för att klotet skall få rundheten 1.

Vi kommer att använda det sista måttet på rundhet. För en polyeder, given av hörnens koordinater, är det en trivial, om än mödosam, uppgift att beräkna dess rundhet. Gymnasiekunskaper räcker i princip. Några kända polyedrars rundhet framgår av (en.wikipedia.org/wiki/Sphericity), som dock använder ett annat mått, tredje roten ur IQ . I övrigt har jag tagit uppgifter om volym och area av arkimediska och andra kroppar från (Webb, 2018).

Ett försök att hitta rundast tänkbarast polyedrar med n sidor för ett antal små n görs i (Lenguel).

3.6 Lika omkrets-problemet

Måttet IQ bygger på att klotet är den kropp med given begränsningsyta som omsluter störst volym. Detta är en sats som man gärna tror på. Jag förenklar och talar i stället om motsvarande sats i två dimensioner:

Sats. Den figur med given omkrets som omsluter störst yta är en cirkel.

Detta tror man gärna på, och så har gjort så under lång tid. Enligt sägnen som kan härstamma från Karthagos grundade omkring år 814 f.Kr.

Efter det att hennes man hade mördats av Pygmalion flydde Dido till Afrikas kust där kung Jarbas lovade henne så mycket land som kan omslutas av en oxhud. Dido skar huden i strimlor, och med detta kunde hon omsluta tillräckligt med mark för att kunna bygga en borg. Runt borgen växte staden Karthago fram.

sv.wikipedia.org/wiki/Dido

Om oxhuden var 3 m² och skars i millimeterbreda strimlor, så blev repet 3000 m långt. Eftersom Dido kände till satsen ovan, så lade hon repet i en halvcirkel, där vattnet utgjorde den andra gränsen. Om cirkelns radie var r , så blev $\pi r = 3000$, $r = 1000$, så ytan $\pi r^2/2$ blev 1,5 km², vilket väl räckte till en borg.

Så även om problemet att hitta figuren med störst yta med given omkrets, det s.k. *isoperimetriska problemet*, hade en uppenbar lösning, så dröjde det till slutet av 1800-talet innan det kom ett bra bevis.

Det finns trevliga geometriska bevis, som bara visar att om en lösning existerar, så är det en cirkel. Sådana försök finns i (Hehl, 2013). Men efter något års matematikstudier får man enkla bevis, baserade på Fourier-serier. Några sådana bevis finns i (Luthy, 2008) och (Stevens, 2013).

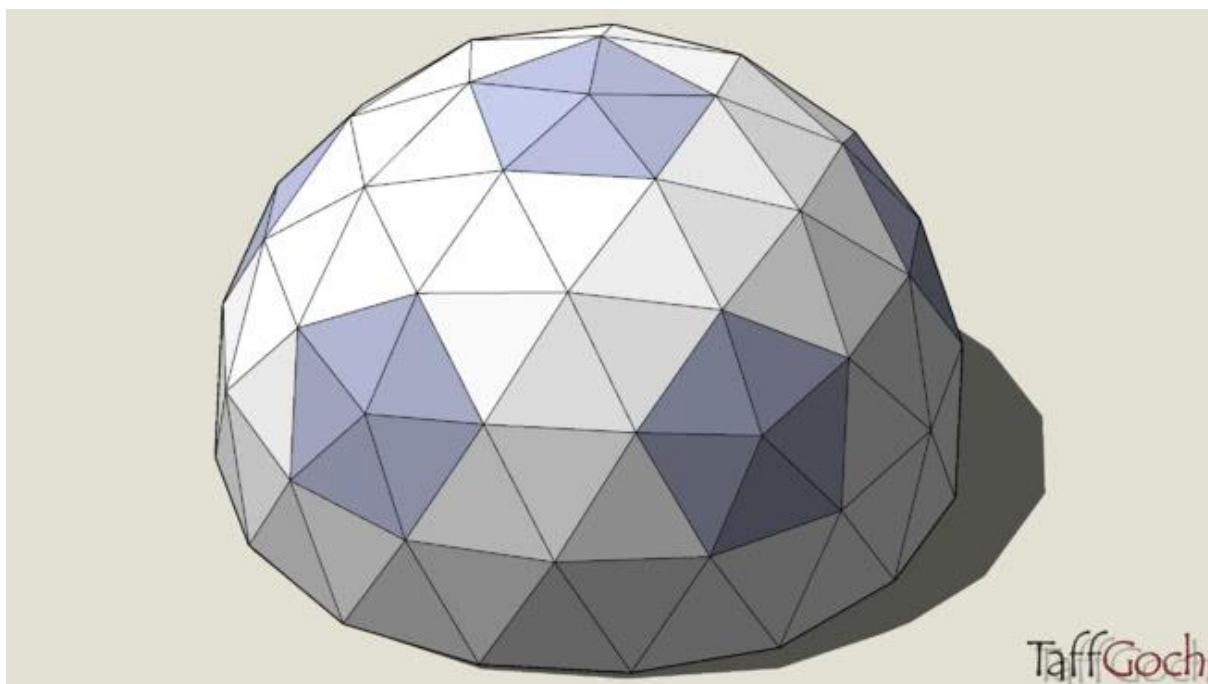
Motsvarande gäller i det tredimensionella rummet.

3.7 Mycket runda polyedrar

Inom varje symmetrigrupp finns polyedrar med rundhet godtyckligt nära 1. Man kan göra följande konstruktion:

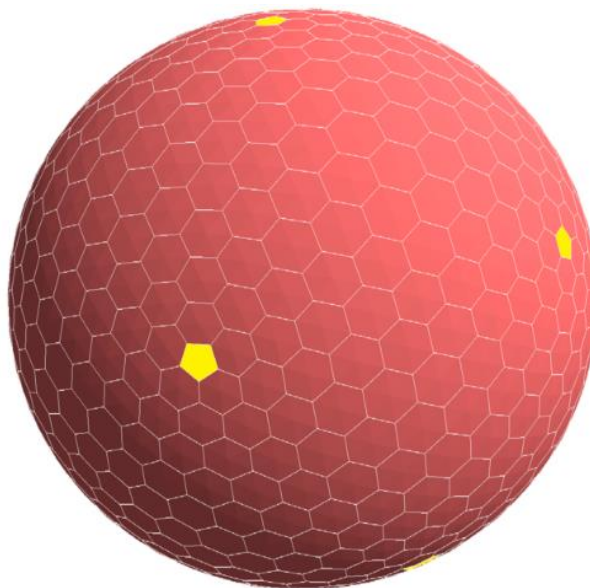
- Börja med ikosaeder inskriven i enhetsklotet som har $n_0 = 20$ sidor.
- Dela upp varje triangel i fyra deltrianglar med de gamla hörnen samt hörn i kanternas mittpunkter.
- För ut de ursprungliga sidornas mittpunkter till klotytan.
- De nya trianglarna med dessa hörn bildar en n_1 -siding med $n_1 = n_0 \cdot 4$
- Denna n_1 -siding behandlas på samma sätt.
- I det j -te steget är rundheten $1 - \theta(1/2^{2j}) = 1 - \theta(1/n)$. (Symbolen θ betyder en funktion som skiljer sig högst en konstant faktor från uttrycket i parentes.)

Jag antyder ett bevis för det sista påståendet. De n sidorna är jämnt fördelade och ungefär lika stora. Trianglarnas sida är därför $\theta(1/\sqrt{n})$, vinklarna blir också $\theta(1/\sqrt{n})$, och cosinus för vinklarna blir $\theta(1/n)$, och felet i rundhet blir av samma storleksordning. Figur 6 visar en mycket rund kropp med många sidor, som innebär ett steg i en liknande procedur.



Figur 6. En geodesisk dom baserad på ikosaedern. Varje triangel är uppdelad i fyra deltrianglar, en process som kan upprepas hur många gånger som helst. Bild: Sketchup shop, Geodesic Dome.

Det finns andra sätt att skapa polyedrar med rundhet godtyckligt nära 1, t.ex. med bara 5- och 6-hörningar, varav de senare inte är lika stora eller regelbundna. Dessa beskrevs först av Michael Goldberg (Goldberg, 1935), se (Wikipedia, Goldberg polyhedron, 2018).



Figur 7. Mycket rund mångsiding med 12 femhörningar och resten 6-höringar. Trots rundheten är det givetvis inte en kandidat till en ny fotboll. Bild: en.wikipedia.org/wiki/Goldberg_polyhedron. By Tomruen [CC BY-SA 4.0 creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/], from Wikimedia Commons

3.8 Gränser för polyedrars rundhet

Att räkna ut rundheten för en polyeder, när hörnens läge är givna, är en trivialitet som kräver litet geometrisk känsla, men därutöver nästan bara Pythagoras' sats och trigonometriska funktioner.

Litet svårare är uppgiften: *Ge en övre gräns för rundheten av en polyeder med n sidor!* Ännu svårare är frågan: *Vilken polyeder med n sidor är rundast?*

Frågorna började undersökas redan i slutet av 1800-talet, bl.a. av den finske matematikern Lindelöf. En övre gräns för rundhet av en n -siding bevisades i (Goldberg 1935).

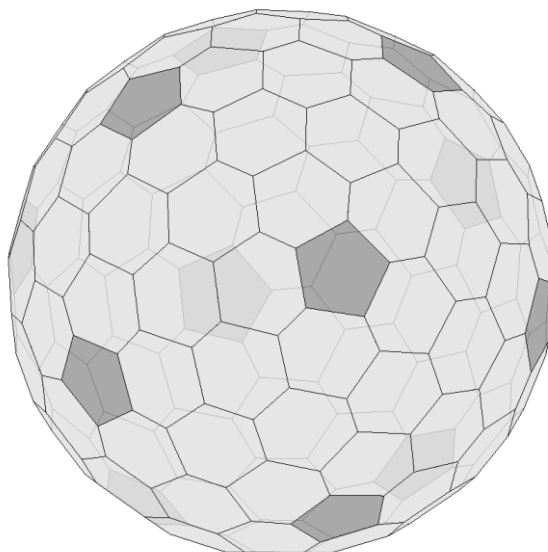
En grundlig genomgång finns i (Lenguel). Av formeln för den övre gränsen för rundheten följer, genom numeriska räkningar, att denna borde vara approximativt

$$1 - 3,02/n + O(n^{-2})$$

Författarna hittade för ett fåtal små n , polyedrar med optimal rundhet, i några fall utan antagande om symmetri. I andra fall fanns det bara förmodan att den funna kroppen var optimal. Ett exempel visas i Figur 8.

Författarna bevisar också att det finns oändligt många polyedrar i de olika symmetrigrupperna. För givet antal sidor och topologi hittade författarna lokala minima i rundhet med numeriska metoder. Därmed kunde vissa reguljära kroppar få en förmodad optimal rundhet.

Några komplicerade symmetriska kroppar visas i (RobertLovesPi) och (Webb, 2018).



Figur 8. 132-siding med rundhet 0,977, vilket förmodligen är optimalt för detta antal sidor. Bild och uppgifter från (Lenguel)

3.9 Smala strimmor

Polyedern i avsnitt 0 har för många sidor för att vara användbara som fotbollar. I stället kan man slå samman närliggande trianglar till smala strimmor, som kan bredas ut över en platt yta.

Man kan få $\theta(\sqrt{n})$ strimmor. Börja t.ex. med ekvatorn och tag sedan latituderna på båda sidor. Allt borde gå bra, till dess att man kommer till ett av de tolv hörn som förbinder bara 5 trianglar. Om man tvingas bryta där, gör det ingenting, för det blir fortfarande $\theta(\sqrt{n})$ strimmor. Detta ger satsen:

Sats. Det finns en följd av heltal n som går mot oändligheten, sådana att en n -siding bildas av $\theta(\sqrt{n})$ plana paneler som viks och sätts samman till denna polyeder med rundhet

$$1-\theta(1/n).$$

Resultatet får konsekvenser när man skall göra fotbollar. Man söker inte efter den rundaste polyedern med givet antal sidor. Gör man det, brukar man få så runda sidor som möjligt. I stället söker man efter polyedrar som byggs upp av smala platta paneler, som kan vikas och anpassas till klotytan. En sådan fotboll är Brazucan på omslaget och i Figur 32.

Satsen ovan kan skärpas. Kan man skala en apelsin så att resultatet bara blir en enda smal remsa? Kan man göra så också med polyedern i Figur 6, Figur 7 eller Figur 8? Det kanske går, men i varje fall kan man skala en triangel mellan två femhörningar utan avbrott, vilket ger:

Sats. Det finns en följd av heltal n som går mot oändligheten, sådana att en n -siding bildas av ett konstant antal plana paneler som viks och sätts samman till denna polyeder med rundhet

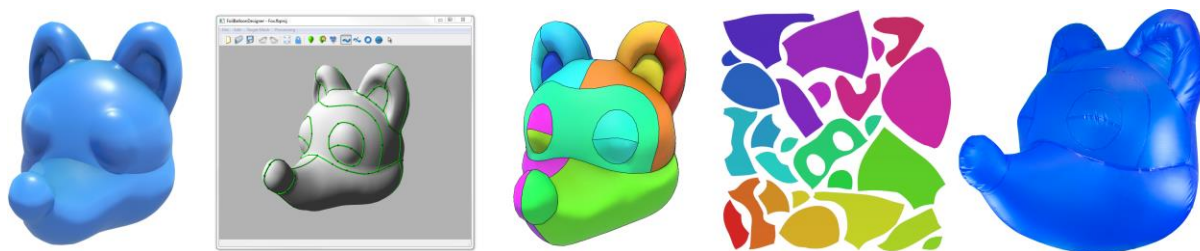
$$1-\theta(1/n).$$

Jag tror, att det skulle räcka med en enda panel som blir allt smalare då n växer. Jag såg på Swerve-bollen Figur 47, som bildar en Goldberg-polyeder, och det verkade gå att skära en sådan yta i en enda strimma.

Detta har nog ingen praktisk betydelse för tillverkning av fotbollar.

3.10 Uppblåsbara figurer

Det finns ett stort steg mellan en polyeders *topologi*, (antal sidor, hörn och kanter och hur dessa hänger ihop), och detaljutformningen av vackra mönster av platta paneler som kan avpassas till en uppblåsbar figur med samma topologi. Hur detta kan ske visas i (Skouras, 2014).



Figur 9. Programvara för att skära till platta paneler till en uppblåsbar figur. Bild: (Skouras, 2014)

Man kan förvånas över att seriösa forskare och programmerare med starka datorer vill arbeta med sådana problem, utan vars lösning mottagarna, de lekande barnen, skulle vara lika lyckliga.

Inte ens fotbollen behöver optimalt runda bollar. Emellertid har de senaste fyra världsmästarbollarna visat hur vacker och smidig anpassningen till klotytan kan bli. Artikeln från (Skouras, 2014) et al. visar att redskap för att skapa riktigt runda bollar finns tillgängliga.

3.11 Sammanfattning

De matematiska resultaten kan summeras upp så här: En boll skall vara symmetriskt och rund. Symmetrigrupperna är få och lätta att räkna upp. Genomgången i avsnitt 7 visar att de flesta symmetrigrupperna i tre dimensioner har använts, utom tetraeder- och dodekaedergrupper utan speglingar. Av tabellen i avsnitt 11 framgår att symmetrigruppens storlek har varierat från 4 till 120, antalet paneler i bollarna har varierat från 2 till 72, antalet hörn från 0 till 140 och antalet kanter från 1 till 210.

Rundhet är lätt att mäta. Det är inte säkert att de kända arkimediska polyedrarna är rundast, utan ibland kan de modifieras för att öka rundheten.

Brist i rundhet för bra n -sidiga polyedrar är av storleks-ordningen $1/n$. Om man däremot betraktar mångsidingar bestående av n paneler, som kan vikas till polyedrar, så blir bristen i rundhet $1/n^2$. Vid konstruktion av bollar bör man därför använda paneler som inte skall vara för breda.

Till varje symmetrigrupp finns oändligt många polyedrar, och polyedrarna kan med bibehållande av symmetrin ändras till figurer med vackrare utseende. Det finns alltså ingen bästa lösning på bolldesignen, även om man begränsar antalet paneler.

4 Krav på bollar

Sporterna har olika krav. Biljard och boule använder massiva bollar utan dekorationer och utan krav på aerodynamik. Bordtennis- och innebandybollar skall vara enfärgade. Golfbollar skall flyga långt och snabbt. Vi snävar in framställningen till att gälla i huvudsak *fotbollar*.

4.1 Runda

Fotbollar skall vara *runda*, så nära klot som möjligt.

4.2 Isotropa

De skall vara lika i alla riktningar, *isotropa*. De skall ha en jämn fördelning av massa och elasticitet, så att de studsar på samma sätt, var de än faller på marken och var än spelaren sparkar på dem. I hörn mellan tre eller fler paneler blir bollen hårdare.

4.3 Lagom sträva

Tillslaget skall kunna ge en kraftig skruv. Bollarna skall vara möjliga att greppa för målvakten i fotboll (eller samtliga spelare i t.ex. basket eller volleyboll). Strävheten skall bidra till en bra bollbana, enligt avsnitt 6.1.

4.4 Studsa bra

De skall *studs bra* och likformigt, vilken del som än träffar marken eller foten.

4.5 Lika under hela matchen

De skall *inte suga upp vatten*. De skall *hålla luften*. Dessa krav är huvudsakligen materialproblem.

4.6 Långa skott

Detta beror på studsens, men också på den *aerodynamiska utformningen*. Turbulent strömning accelererar luften och tar därmed energi från bollen. En baklängesrotation längs en vågrät axel vinkelrät mot bollens bana ger lyftkraft.

4.7 Förutsebar bana

Bollbanan skall kunna förutses av såväl utespelare som målvakter, antingen bollen är skruvad eller ej.

4.8 Lätta att se

Spelare och publik skall kunna se bollen tydligt och kunna bedöma hastighet, riktning och skruv. Detta talar mot slumpmässig färgning och möjligen också mot symmetrigrupper utan spegling.

4.9 Skona spelarna

Hårda sömmar får inte ge smärta när spelarna nickar.

4.10 Ge många mål

Publiken vill ha *många mål*, och arrangörerna måste göra detta möjligt. Därför kan FIFA ignorera målvakternas krav på en förutsebar bana.

5 Jämförelsemått

För polyedrar kan man exakt räkna ut mått som kan vara praktiska att applicera på fotbollar. Betrakta därför en polyeder med centrum i origo, innesluten i enhetsklotet och med minst en punkt på enhetsklotet. För en sådan polyeder definierar vi måtten nedan.

5.1 Rundhet

I avsnitt 3.5 föreslogs $36\pi \cdot V^2/A^3$ som mått på rundhet hos polyedrar.

Detta mått ger inte direkt rundheten av en boll, eftersom man också måste ta hänsyn till lufttryck och elasticitet hos bollen.

5.2 Panelbredd

För tillverkning av bollarna är rundheten inte särskilt relevant. Det gäller att kunna lägga ut platta paneler på en klotformig yta utan att behöva dra och sträcka i skinnbitarna, som man gjorde förr, eller hetta upp plasten så den anpassar sig mer till ytan. Det är lätt att lägga smala paneler på en klotyta, vilket jag sett i filmen om Brazuca-tillverkning (Adidas, Brazuca Production Video, 2013). Skall dubbelkrökningen besvära så litet som möjligt, bör panelerna vara långa och smala. *Panelernas maximala bredd* kan därför vara ett bra, om än inte väldefinierat mått.

5.3 Sömmarnas längd

Den totala längden på polyederns sidor. Korta sömmar kan sänka tillverkningskostnaden, långa sömmar kan vara bra för aerodynamiken. När FIFA skall godkänna nya bollar, är sömmarnas längd en bedömningsgrund.

5.4 Paneler per hörn

Hörn mellan tre eller fler paneler är gör bollen hårdare där än på andra ställen. Tillslagen blir beroende av hur bollen ligger.

6 Bollars fysiska egenskaper

Vilken av dessa mått som verkligen har betydelse för bollens kvalitet är inte klart. Detta måste avgöras genom experiment på prototyper av bollarna. För detta behövs inte bara matematiker utan även statistiker.

6.1 Aerodynamik

En viktig fråga är fotbollens aerodynamik, hur den rör sig i luften.

Nära ett föremål, t.ex. en flygmaskinsvinge eller en boll, rör sig i luft, så kan luften röra sig *laminärt* eller *turbulent*. I laminär strömning följer luften föremålets form. I turbulent strömning accelererar luften i virvlar, som tar energi från föremålet och därmed förorsakar luftmotstånd, eng. *drag*.

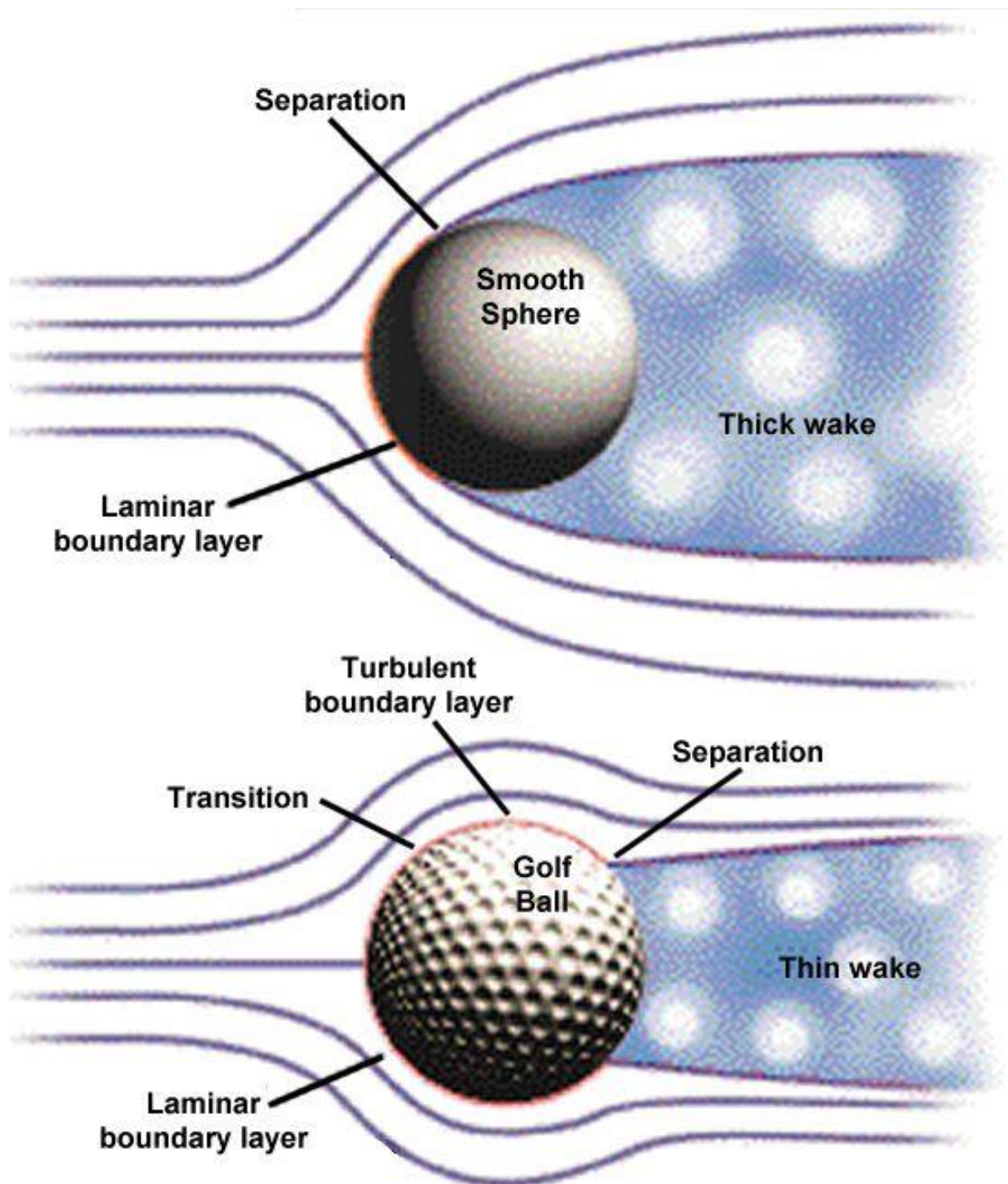
Luftmotståndet är proportionellt mot tvärsnittsytan och mot kvadraten på hastigheten. Detta beror på att molekylernas rörelseenergi är kvadraten på deras hastighet och på att antalet luftmolekyler som kolliderar med föremålet är proportionellt mot tvärsnittsytan.

Föremålen skall utformas så, att turbulensen blir så liten som möjligt. Särskilt viktigt är detta för golfbollar, vars hastighetsrekord är 349 km/h.

(www.guinnessworldrecords.com/world-records/fastest-golf-drive/, 2019)

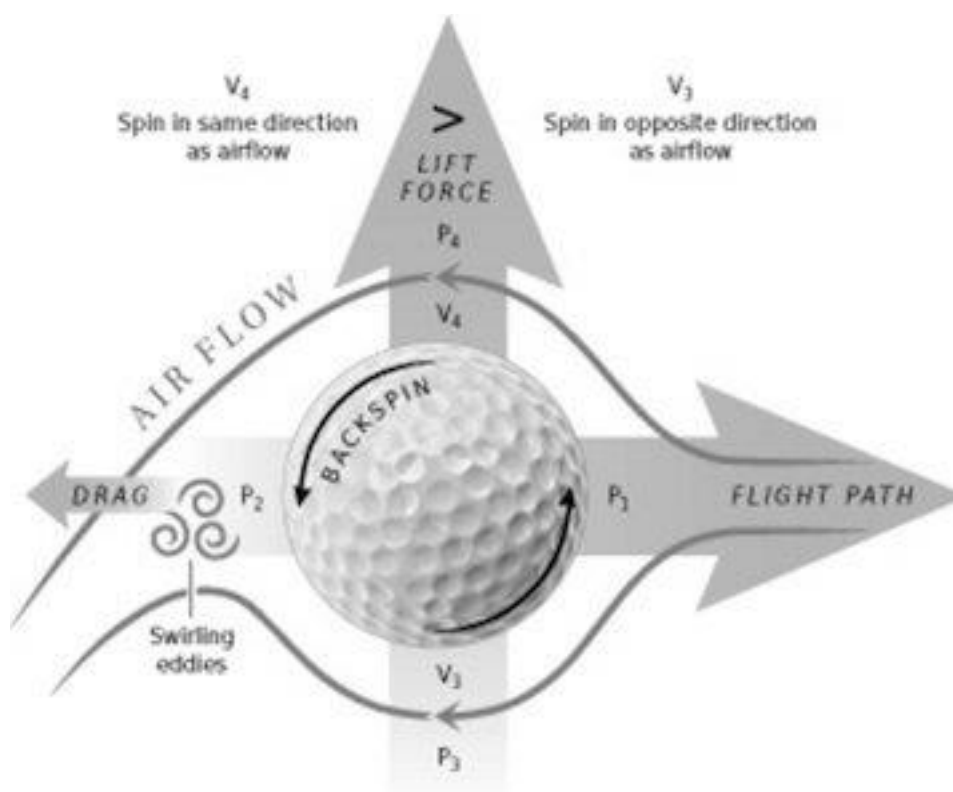
Rekordet för fotbollar är 212 km/h. Zlatan har en sätteplats med 150 km/h. Se (www.youtube.com/watch?v=rOa_xL2lLxQ). Aerodynamiken betyder därför mer för golfbollar, och dessa har utformats för att minska luftmotståndet.

Hur groparna i en golfboll minskar turbulensen visas i Figur 10.



Figur 10. Luftmotstånd för sfär och golfboll. Den laminära luftströmmen släpper visserligen vid en grop i bollen, men den återvänder till nästa grop. Resultatet blir därför att luftströmmen släpper bollen senare och turbulensen minskar. Enbart denna effekt fördubblar slagets längd. Källa: (Scott, 2005)

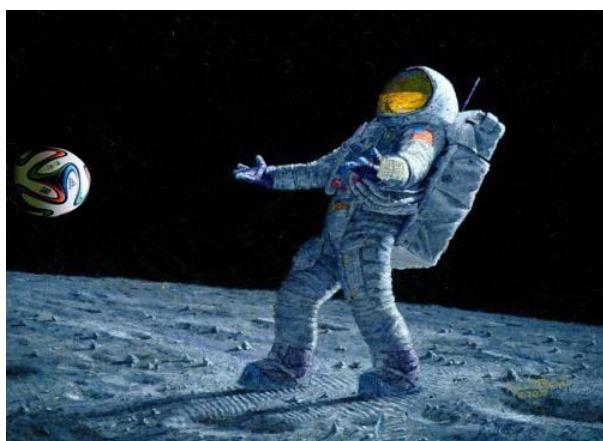
Hur bollens rotation kan ge lyftkraft visas i Figur 11.



Figur 11. Lyftkraft av spin. Groparna i bollen drar med sig luften. Detta gör att hastigheten i luftströmmen blir större ovanför bollen än under. På grund av Bernoullis princip (en strömmande vätska ger undertryck) blir trycket lägre på ovansidan av bollen. Detta ger en lyftkraft och därmed längre slag. Källa: (Salzberg, 2013). Effekten att en kropp som rör sig genom en fluid (en vätska eller en gas) samtidigt som den roterar accelereras vinkelrätt mot rörelseriktningen kallas Magnuseffekten.

Samma principer gäller för fotbollar, som inte är så ojämna som golfbollar men inte heller helt släta. När sömmar och dålig rundhet inte längre hjälper, så har man gjort de senaste VM-fotbollarna knottriga.

Turbulensen är slumpartad. För stor turbulens kan få bollen att på ett oväntat sätt avvika från sin bana. Jabulani-bollen från 2010 har fått kritik för detta, särskilt av målvakter.



På månen behöver man inte tänka på aerodynamiken. Luftmotstånd finns inte. Vid samma tillslag går bollen mer än de sex gånger längre som den svagare gravitationen orsakar. Bollen går spikrakt, oavsett skruv. Däremot är skruven i bordtennis fortsatt viktig på månen för hur bollen studsar.

Bild: [www.aerospaceguide.net/pictures/](http://www.aerospaceguide.net/pictures/astronaut.html) astronaut.html (förbättrad av förf.)

6.2 Ytstruktur

När bollarna har blivit allt rundare på grund av nya tillverkningsmetoder, har tillverkarna i stället varierat *ytstrukturen*. Ytstrukturen har betydelse för såväl dynamik som för spelarnas grepp om bollen. Detta gäller även för volleybollar med väsentligen lägre hastigheter än fotbollar, t.ex. Mikasa i Figur 15. Genom ett sexkantmönster på bollen Flistatec, Figur 40, har man minskat spridningen av nerslagspunkter vid maskinella kast: (Moltensports, 2009).

Även innebandybollar (Figur 16) har en gropig yta av aerodynamiska skäl. Groparnas egenskaper är reglerade.

Alla moderna matchbollar för fotboll har en grövre och mer genomtänkt ytstruktur nu än förr, t.ex. bollar från Adidas, Bend-it, Mitre, New Balance, Nike, Puma, se Figur 34, Figur 37, Figur 45, Figur 23, Figur 22, Figur 18.

Ett exempel på hur ytstrukturen kan utformas för att ge en extremt krökt bollbana är leksaken Kickerball, se Figur 12 och (Kickerball, 2018). Jag har själv provat.



Figur 12. Kickerball. Låg vikt och djupa mönster ger en extremt krökt bollbana. Bild: Författaren.

6.3 Tillslag och isotropism

Säkerligen spelar bollens uppbyggnad en roll för tillslagets effektivitet. Om man sparkar på polerna i en rotationssymmetrisk boll med en uppbyggnad enligt Figur 14 eller Figur 17, så blir effekten säkert en annan än om man sparkar på ekvatorn. En tillverkare anvisar spelarna att i fasta situationer sparka på ventilen, som är särskilt stark och har märkts ut av detta skäl.

Om hårda hörn har någon större betydelse för mer regelbundna bollar är en fråga, som bara kan avgöras med experiment. I FIFA:s testprogram (FIFATV, 2018) verkar detta inte ingå. Jag föreslår att FIFA kräver att Adidas skall redovisa experiment av den typ som visas i den redan nämnda Youtube filmen (Moltensports, 2009), och att man därvid tar hänsyn till var tillslaget på bollen sker.

Hur motsvarande kontroller görs för bordtennisbollar visas i t.ex. (Channel, 2017). En kontroll som görs är att bollarna skall rulla rakt.

Fotbollsspelare justerar bollens läge i fasta situationer, så att de skall träffa bollens hårdaste punkt, ventilen. Denna har särskilt utmärkts i bollen i Figur 37, Reverse Curl-It Pro.

Frågor om bollarnas fysiska utformning faller dock utanför ramen för denna uppsats.

7 Tidigare bollar och deras symmetrier

7.1 Disposition

Efter några allmänna synpunkter gör detta kapitel en genomgång av bollar i olika sporter, sorterade symmetrigrupp. Inom varje symmetrigrupp tas under-grupper med störst ordning först. Jag har bortser från dekorativ målning och tänker enbart på panelerna. I några fall har jag tagit med bollar som bara sytts upp i några fåtal exemplar, och bollar som har stannat på ritbordet.

Den äldsta bollen är från 1900. Sedan 1930 finns alla typer av VM-bollar med. De sista åren har många nya symmetrigrupper kommit till användning.

Antalet bollar är stort. Ett urval har gjorts. Bara några exempel har tagits med från grupper med samma symmetrier och likartad utformning av panelerna. Jag har bortsett från målningen av bollarna och sett enbart till panelerna.

Ett fåtal bollar har jag hållit i själv. För övrigt har källorna varit olika sajter på nätet. Det finns flera sajter med historiska bollar. Förutom Wikipedia och Adidas sajter finns också (www.soccerballworld.com/History.htm, u.d.). Från (soccerballcollection.com/HISTORY.htm, u.d.) kan man också köpa repliker av gamla bollar. Jag har också granskat sidor om andra sporters bollar, t.ex. för tennis, baseboll, volleyboll, basketboll, golf och innebandy.

En genomgång av tänkbara polyedrar som kan ligga till grund för bollarna finns i (Swart, 2015). En annan genomgång med mera bevis finns i (Lenguel).

Sportgrenarna har tagit idéer från varandra. Förvisso har det hänt mest i fotbollen, som har haft gott om pengar, medan andra grenars bollar gått i gamla hjulspår.

Nya material har rationaliserat tillverkningsprocesserna. Filmer på Youtube visar fabriksmiljöer. Barnarbetare som syr upp läderbollar i Pakistan har jag inte hittat. Nike har skurit ner försäljningen av sådana för att undvika problem.

Bollarnas hölje tillverkades av läder ännu på 60-talet. Detta innebar att bitarna måste sträckas på olika sätt för att kunna bli dubbelkrökta. Från 2010 kunde man pressa fram sfäriska paneler. Därmed bortföll ett viktigt krav på bollarnas utseende.

Skärningarna av paneler har blivit elegantare och mera fantasifulla, i och med att grafisk programvara kan beskriva utseendet mera exakt. Ett exempel på en programvara kan designa plana paneler till uppblåsbara figurer enligt en ungefärlig ritning. beskrivs i (Skouras, 2014).

Ibland är det svårt att se symmetrin från ett fåtal bilder. Jag har försökt anknyta till enklare polyedrar, platonska, arkimediska och andra, för att förklara hur bollen med sin symmetri kan existera.

7.3 Rotationssymmetrier

Vi börjar med en grupp bollar utan dekorationer eller ojämnheter. *Bordtennisbollar*. skall vara enfärgade: vita eller orange. De har ingen synbar begränsning av symmetrin, utan ser ut att ha klotets fullständiga symmetrigrupp, dubbelt oändlig. Konstruktionsmässigt är detta inte sant, för bollarna görs av runda platta bitar av plast eller celluloid, stora som oblater. Ämnena pressas till halvklot som senare klistras ihop och skarven vid "ekvatorn" slipas av. Därför är de troligen starkast runt ekvatorn., och de har alltså *den oändliga rotationssymmetrin* som symmetrigrupp.

Det finns skäl till reglerna om en enfärgad boll, bortsett från stämpling om varumärke och kvalitet. Skruven i bordtennis är oerhört viktig för hur bollen studsar. En bra spelare försöker dölja skruvens riktning. Bollen skruvas så fort så att ögat inte kan uppfatta detta, även om bollen vore färgad, och tiden skulle knappt räcka för så sen information om skruven.



Figur 13. I strid mot tävlingsreglerna säljer Stiga flerfärgade bollar. Symmetrierna har ingenting med tillverkningen att göra. De blåvita bollarna visar bordtennisbollens unika oändliga symmetri, dock utan koppling till produktionsprocessen. Bild: www.bamba.se

Övriga bollar har *ändliga symmetrigrupper*. Jag börjar med rotationsgrupperna.

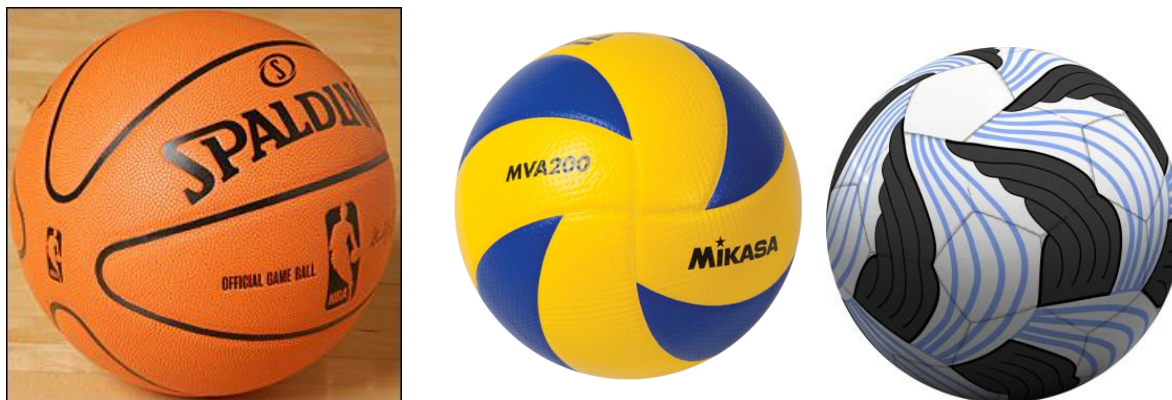
Första exemplet är en enkel badboll. Den uppvisar full rotationssymmetri av ordningen 6, inklusive spegling, så gruppen har 24 element.



Figur 14. En enkel badboll med full rotationssymmetri. Bild: www.swiminn.com.

Problemet med rotationssymmetrier är att många paneler möts vid bollens poler. Om det var läder och traditionella sömmar, så blev bollen onödigt hård där. Polerna kräver därför specialbehandling.

Rotationssymmetri används även till professionella bollar. Problemet är att många sidor behöver användas, t.ex. 8 stycken, och då blir hörnen för komplicerade genom att för många sidor möts. Bollen ovan undvek detta genom att halvera symmetrin, bollen i Figur 15 vänster genom att låta hörnpanelen växa ihop med latitudpaneler, och Figur 15 mitten genom att inte låta latitudpanelerna komma fram till ena polen. Genom att speglingen är borta blir utseendet intressantare. Med modern teknik räcker 8 paneler gott för en enkel produktion, se (Mikasa, 2018).



Figur 15. Till vänster: Modern basketboll. Problemet med hörnen har lösts genom att en pol hänger ihop med hälften av "klyftorna". Symmetrigruppen har ordningen 16. Bild: www.indiamart.com. I mitten: Modern volleyboll Mikasa MVA200 med rotationssymmetri av totalt ordning 8 utan spegling. Bild: <https://mikasasports.com>. Till höger: Ett konstnärligt förslag till rotationssymmetri av ordningen 10, uppmålat över de riktiga panelerna i en klassisk fotboll. Bild: (Swart, 2015).

Innebandybollen skall enligt reglerna från (International Floorball Federation, 2018), vara enfärgad (en annan färg är tillåten på insidan) och ha 26 hål.

Samma symmetri, men ett helt annat utseende har *innebandyballar*. Här ser man inga polyedrar, men däremot 26 stycken hål av given storlek. Spelarna vill ha dessa jämnt fördelade över klotytan.

På vanliga innebandyballar ser man *latituderna* bäst. Skarven är vid "ekvatorn", "vändkretsarna" har 8 hål var, "polcirkelarna" 4 var, och "polerna" har ett hål var. Hålen är förskjutna längs latitudcirkelarna för att få lagom avstånd, men lika avstånd går inte att få med 26 hål. Bollen är inte speglingsbar, men rotationer om ett kvarts varv är möjliga. Bollen har därmed samma rotationssymmetri av ordningen 8 som bollen i mitten av Figur 15. Dessa ballar ser ändå helt olika ut.



Figur 16. Innebandyballar. Bild vänster: www.stadium.fi/urheilu/salibandy/salibandytarvikkeet/039119001/aero.aero-white.white. Bild höger: www.salming.com/se/innebandy/utrustning/bollar/aero-plus-floorball%2c-mixed-colours/c-424/p-31735

Med blotta ögat ser man att avstånden mellan hålen är olika. Därmed kommer en uppgift:

Fördela 26 hål på klotyta så jämnt som möjligt.

Vi definierar detta på följande sätt: Låt bollen vara enhetsklotet. Ange för varje par av hål vinkeln i origo mellan vektorerna till hålens mittpunkter. Tag för varje hål reda på vinkeln till det närmast hålet. Tag reda på kvoten mellan den minsta och största sådana vinkeln, och låt denna kvot definiera *fördelningens jämnhet*. Den är alltid mindre än 1. Jämnheten är en kontinuerlig, styckvis analytisk funktion av de 26 mittpunkternas koordinater. Det gäller att maximera denna funktion.

Ett sätt att placera ut hålen är som på bilderna i Figur 16. Det finns två parametrar, "vändkretsarnas" och "polcirkelarnas" latituder, och jämnheten maximeras med hänsyn till dessa. Symmetrigruppen får ordningen 8. Enligt en mätning på en fysisk innebandyball blir jämnheten ungefär 0,7.

Ett annat sätt att placera de 26 hålen på en innebandyball är att utnyttja kubens symmetri, se bilden i Figur 26 av en stympad kuboktaeder. Hålen vara i riktningen från origo till mittpunkterna till var och en av sidorna. Ordningen för symmetrigruppen blir 48, alltså mycket större än i de vanliga bollarna. Enkla räkningar visar, att jämnheten för kubgruppens fördelning blir 0,65.

Den senare fördelningen ger ett lokalt maximum för jämnheten, i den meningen att om man endast flyttar *ett* hål, så påverkas inte de maximala och minimala avstånden om ett gult hål flyttas, medan de maximala avstånden ökar om ett rött eller blått hål flyttas.

Symmetri är ett starkt villkor, som kan göra det svårare att få jämn fördelning av hål. Om man släpper kravet på symmetri, så kan det bli lättare. Slutsatsen är, att innebandybollen troligen inte är optimal. Den är inte heller särskilt vacker.

Att finna jämnast möjliga fördelning av n stycken hål verkar lättare att hitta den rundaste n -sidiga polyedern. En algoritm för detta skisseras här:

Vi startar med en slumpmässig fördelning, där vektorerna alla är olika, t.ex. genom att ansätta n slumpvektorer från origo och normera dessas längd till 1. Ändpunkterna representerar hålen mitt-punkter.

Därefter flyttas ett hål A i taget. Låt B och C vara hålen närmast respektive näst närmast A , och låt Y vara ett hål skilt från A , B och C . Vi provar att flytta A till ett ställe X , som beror av Y , och där avstånden till B , C och Y är lika stora $= d_Y$. Vi tillåter en flytt till X , om inget av hålen utom B och C har mindre avstånd till X än d_Y . Bland dessa väljer vi det Y som gör d_Y störst.

Denna konstruktion innebär, att fördelningens minimiavstånd mellan hål aldrig avtar. Orsaken att vi väljer de tre avstånden lika, är att ingen direkt förbättring blir möjlig.

Vi försöker flytta hålen ett i taget i en omgång och fortsätter sedan med en ny omgång som flyttar hålen efter samma regler. Flyttningen avbryts när den maximala flyttningen under en omgång underskrider ett visst värde eller om ingen ökning av minimiavståndet mellan hål har inträffat under en omgång.

Dessa villkor utesluter en oändlig loop, men vi kan inte garantera att vi kommit fram till ett globalt maximum av jämnheten. Vi kan däremot uppskatta arbetet under en omgång.

Platsen X definieras av att skalärprodukter mellan vektorerna från origo till respektive A , B , C och Y uppfyller:

$$(v_X, v_B) = (v_X, v_C) = (v_X, v_Y)$$

och att

$$|v_X| = 1.$$

Det gäller alltså att lösa ett ekvationssystem med tre obekanta. Systemet har två lösningar.

För varje omgång måste vi prova med $O(n)$ stycken hål Y och räkna ut avstånden mellan X till $O(n)$ stycken hål. Under en omgång skall alla hål prövas för flyttning, vilket innebär, att varje omgång tar $O(n^3)$ tid. Detta är ganska beskedligt arbete, men hur det fungerar i praktiken återstår att se. Beslutet att använda A s närmaste hål kanske inskränker flyttningarna för mycket.

Förhoppningsvis konvergerar sådana räkningar ofta till en jämnare placering av hålen, och gränsfördelningen kanske är den optimala fördelningen. Efter att ha provat olika startvärden ser man efter om rundheten är densamma. För körningar med (approximativt) samma jämnhet på slutet får man transformera slutresultaten för att se om lösningarna är antingen lika eller spegelvända. I motsatt fall finns det flera lösningar.

Startfördelningen bör inte vara symmetrisk, för den kan ge ett lokalt maximum av jämnhet. Detta gäller för den kubsymmetriska fördelningen ovan.

Vid tillfälle skall jag programmera denna metod och se om jag får en bättre innebandyboll.

Hans Block
2019-05-27

Jag återgår till bollar gjorda av paneler med rotationssymmetri. Bollen från 1900, Figur 17, kan man rotera på fyra sätt, även om man kunde tre att det var 8 sätt. Dessutom kan man byta ut polerna och spegla bollen, så symmetrigruppens ordning blir 16. Bollen har 8 paneler och 6 hörn, där fyra paneler möts.



Figur 17. Till vänster fotboll från 1900, med anor sedan 1855. Lägg märke till snöret. Hur känns det att nicka på det? Till höger går mönstret går igen i en modern basketboll. Detta är inte en tillfällighet, eftersom basket i början av 1900-talet på den tiden spelades med fotbollar. Basketbollen har behållit sitt utseende, medan fotbollen, med mera pengar i ryggen, har förändrats många gånger. Bild till vänster (www.soccerballworld.com/History.htm, u.d.), Jacques Barralon. Bild till höger: (www.indiamart.com)

I ovanstående bollar begränsas panelerna – grovt talat – av punkter med samma longitud. Bollen i Figur 18 har samma symmetrigrupp men är mer orienterad till *latituder*.



Figur 18. Fotbollen 2014 PUMA evoPOWER 1.3 har latitudorienterad rotationssymmetri med 22 paneler. Symmetrigruppen har ordningen 8. Bilden soccer.com, www.youtube.com/watch?v=YpRWkYgCo4w, 2016.

Bollar med samma namn har paneler med dodekaedersymmetri enligt Figur 43.

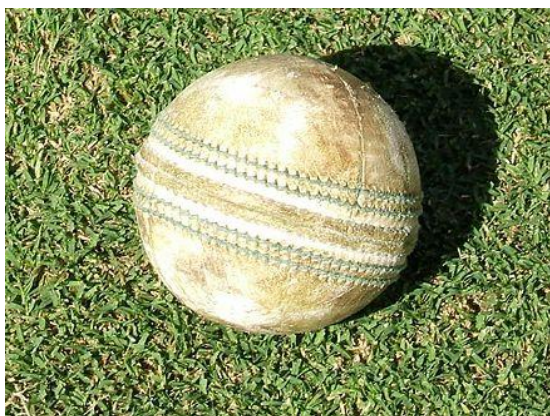
Hans Block
2019-05-27

Tennisbollen och *basebollen*, Figur 8, har en rotationsgrupp med spegling. Vridningar ett halvt varv ger en symmetrigrupp av ordningen 8.



Figur 19. Till vänster: Tennisboll. Bild: <http://annikatannstrom.se/2016/02/12/trygghetsystem-och-tennisbollar/>. I mitten: Baseboll. Bild: [en.wikipedia.org/wiki/Baseball_\(ball\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Baseball_(ball)). Båda bollarna har samma idé och symmetri. Denna rotationsgrupp av ordningen 8 är också undergrupp till kubgruppen. I figuren till höger visas en tvåfärgad kub som kan vändas och speglas på samma sätt som bollarna.

Cricketbollen ser som ny ut att ha oändlig rotationssymmetri som en bordtennisboll. I själva verket är den gjord av fyra paneler, där vardera halvklotet är delat på två, men det norra halvklotet är vridet 90° längs axeln genom polerna. Sömmarna inom varje halvklot är utförda på insidan, så de syns knappt på fotografier av nya bollar. Spegling är inte möjlig, så symmetrigruppen har ordningen 4. Se (Wiki, Cricket ball, 2018)



Figur 20. Cricketboll. När bollen är sliten, så skymtar de invändiga sömmarna i två vinkelräta plan. Bild: en.wikipedia.org/wiki/Cricket_ball#/media/File:White_ball_2.JPG. Photograph made by YellowMonkey/Blnguyen

7.4 Tetraedersymmetrier

2010 gjordes ett radikalt grepp: Adidas gav VM-bollen Jabulani tetraedersymmetri, se Figur 21 till vänster. En stympad tetraeder (bredvid) är inte alls särskilt rund. I stället göts rundade hörn och avkapade triangelsidor i tre dimensioner, enligt en film som visar produktionen (Adidas, Adidas JABULANI BALL production , 2010).



Figur 21. Till vänster: 2010 Sydafrika, Jabulani. Tetraeder-symmetri, krökta element, 8 paneler, 12 hörn. Inuti bollen finns en blåsa i form av en dodekaeder. Spåren i den vita "triangeln" är till för att få ett mera laminärt flöde. Bollen är allt för rund med turbulent luftflöde som ger en svårberäknad bana. Till höger: Den arkimediska kroppen stympad tetraeder, som har bollen bygger på. Den har rundheten 0,466.

Bild till vänster: (https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_FIFA_World_Cup_official_match_balls) Bild till höger: (Wikipedia, Arkimediska kroppar, 2014), (Webb, 2018)

Bollen Nike Merlin från 2018, Figur 22, har också tetraedersymmetri



Figur 22. Nike Merlin från 2018. Full tetraedersymmetri, fyra paneler, fyra kanter, fyra hörn. Bild: www.unisport.dk/fodboldudstyr/nike-fodbold-serie-a-merlin-mangobla/175791/.

Hans Block
2019-05-27

En annan boll med tetraedersymmetri är New Balance Furon, Figur 23. I en utvärderingsfilm, (Unisport, 2017), får bollen betyget den allra roligaste, men helt opålitlig i sin bana. Är det tetraedersymmetriens fel?



Figur 23. 2017 New Balance Furon. Bollen har 6 avlånga sexhörningar och 12 fyrhörningar. Den svarar inte direkt mot en polyeder, därför att panelerna är inte plana. Målningen av sexhörningarna tar bort speglingssymmetrin, så att bollen ser intressantare ut. Bild: www.r-gol.com.

Tetraedersymmetri utan spegling visas i Figur 24. Den kan ses om en motsvarighet till Brazuca-bollen, Figur 32. Den kan tänkas uppstå av den förenklade bilden i Figur 54.

Eftersom de fyra panelerna är väldigt smala, så kan de säkert anpassas väl till en rund uppblåst boll och läggas på som i filmerna om tillverkning av Brazuca (Adidas, Brazuca Production Video, 2013). Denna film visar att produktionen inte gav upphov till mycket spill. Här tycks det bli mer än 50% spill om man lägger panelerna i ett triangulärt mönster. Det skulle nästan gå att låta krokarna gripa in i varandra, men för detta behöver mönstret justeras.



Figur 24. Till vänster: Förslag till boll med tetraedersymmetri utan speglingar. Bollen skulle bestå av fyra likadana paneler med utseende som i mitten. Det kan vara svårt att inse att detta mönster "går ihop", men man kan ha hjälp av att utgå från en stympad tetraeder enligt Figur 54, vänster. Bild: (Swart, 2015), spegelvänd för att stämma med bollen.

7.5 Kubiska symmetrier

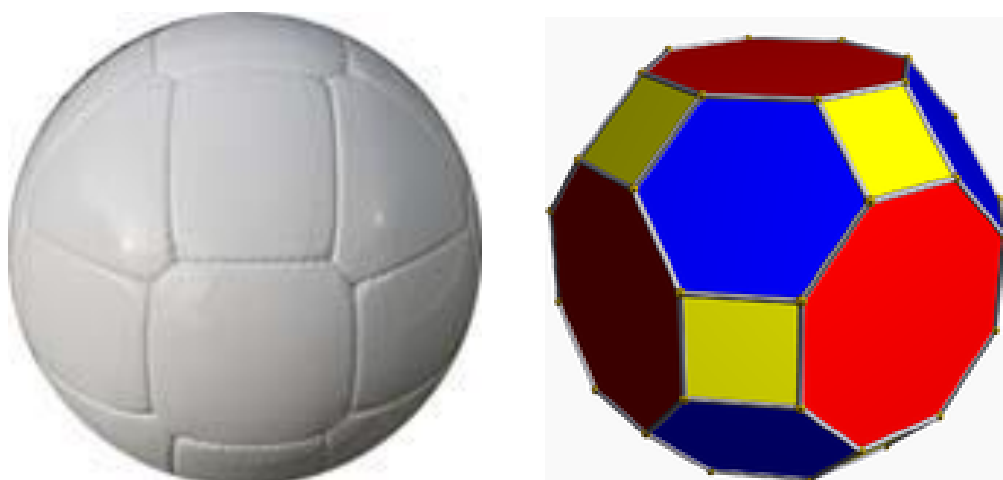
Kubisk symmetri var länge vanligast.

Tre former har full kubisk symmetri av ordningen 48. Den första ges av bollarna i Figur 25, vars ålder skiljer mer än 50 år. För att förstå formen, se Figur 28.



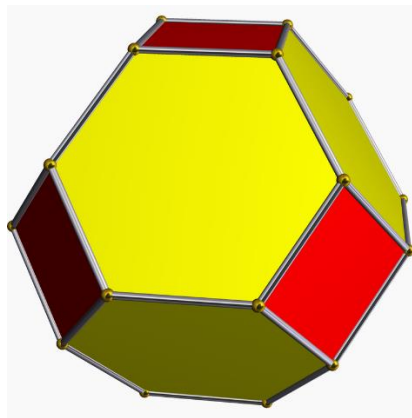
Figur 25. Till vänster: 1963 Santiago. Full kubisk symmetri. 18 paneler, varav 6 fyrhörningar, 12 sexhörningar, 32 hörn. Bild: (<https://www.soccerballworld.com/History.htm>) Picture provided by Jacques Barralon. Till höger: Adidas Performance Euro 16 Glider Soccer Ball, www.ebay.com/p/adidas-Performance-Euro-16-Glider-Soccer-Ball-France-Silver-Metallic-Green-Size5/2255264186

Den andra formen, i Figur 26, påminner om kroppen *stympad kuboktaeder* har inte slagit igenom på samma sätt, men har troligen optimal rundhet med hänsyn till antalet sidor.



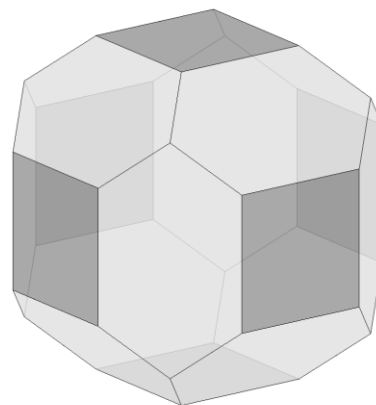
Figur 26. Till vänster: Fotboll av Pieter Huybers. Bild: (Huybers, *The Roundness of Polyhedra*, 2013). Till höger. Den arkimediska kroppen *stympad kuboktaeder* med 26 sidoytor, på vilken fotbollen till vänster är baserad. De röda 8-hörningarna har glidit isär, så att de gula kvadraterna har blivit rektanglar. Därefter har stympningen av hörnen (de blåa rektanglarna) gjorts lösare, så att de blå 6-hörningarna blivit mer lika trianglar. Det är möjligt att optimera rundheten med hjälp av dessa två parametrar. Kroppen är enligt (Lenguel) den rundaste kroppen med 26 sidor, rundhet 0,877. Till höger: *Stympad kuboktaeder*, rundhet 0,839. Bild: (Wikipedia, *Arkimediska kroppar*, 2014), (Webb, 2018).

Den tredje formen bygger på den arkimediska kroppen *stympad oktaeder*. Adidas har sytt upp en billig boll med sådana paneler, se Figur 27. Den arkimediska kroppen är inte särskilt rund, rundhet 0,753, och bollen verkade inte heller vara särskilt rund.



Figur 27. Till vänster: Billig Adidasboll i form av stympad oktaeder med 14 sidor (till höger). Bilden till vänster: Författaren. Bilden till höger. (Wikipedia, Arkimediska kroppar, 2014), (Webb, 2018).

Nästa boll, Crack Top Star, använd i Chile 1962, Figur 28, har inte full kubisk symmetri. Den bygger på samma polyeder till höger i Figur 28 som bollarna i Figur 25 bygger på, men i Crack Top Star har kubyrtorna fått en riktning, vilket ger kubens symmetrigrupp utan 90° rotation.



Figur 28. 1962 Chile, Crack Top Star. Kubisksymmetri utan 90° rotation: 18 paneler, varav 6 stycken "parallelogram" på kubsidorna och 12 stycken 6-hörningar däremellan. 32 hörn. Bild: (picclick.co.uk/The-official-ball-of-the-1962-FIFA-World-232727353746.html). Till höger visas den förenklad, en kropp som enligt (Lenguel), troligen är den rundaste polyedern med 18 sidor. Bild: (Lenguel).

Hans Block
2019-05-27

Denna symmetrigrupp var den vanligaste fram till 1970. Bollarna såg ändå olika ut. Bollen *T-modell* från 1930, till vänster i Figur 29 var olik de flesta. Den hade 12 paneler. Samma paneler har kommit igen i avrundad form, i Mitre Rouge soccer ball och Mitre Delta Fluo från år 2017.



Figur 29. Till vänster: 1930 Uruguay, T-modell. Kubisk symmetri utan 90° rotation, 12 paneler, 20 hörn och 30 kanter. Bild: (<https://classicfootballshop.com/t-model-1930>) Till höger: Samma paneler kommer igen i Mitre Rouge soccer ball från år 2017. Bild: www.walmart.com/ip/Mitre-Game-Rogue-Soccer-Ball/50016757.

Den moderna basketbollen bollen till vänster i Figur 30 har bara 6 paneler, men formen påminner om T-modell. Även Brazuca från 2014, Figur 32, hade bara 6 paneler, ett rekord. Nu har man föreslagit en boll med bara 4 smala paneler, se Figur 24. Till höger i Figur 30 visas en färgad dodekaeder, som en påminnelse om att den aktuella undergruppen till kubens symmetrigrupp också är en undergrupp till dodekaederns symmetrigrupp.



Figur 30. Till vänster: Modern basketboll Gala Beach Smash med samma symmetri som T-modellen, men hälften så många paneler. Bild: www.sportshop.com. Till höger: En dodekaeder, där par av intilliggande sidor har målats i samma färg har samma symmetri. Symmetrigruppen av denna figur är en undergrupp såväl till kubens som dodekaederns symmetrigrupp.

Hans Block
2019-05-27

Under några årtionden från 1930-talet och framåt användes olika variationer av nedanstående kubsymmetri. Varje sida, motsvarande kubens kvadrater, bestod av två, tre eller fyra paneler, skurna på litet olika sätt. Jag spelade fotboll i skolan med sådana bollar. Designen är fortfarande vanlig för volleybollar.



Figur 31. Till vänster: 1950 Brasilien, Superboll. Kubisk symmetri utan 90° rotation, 12 paneler. Varje panel har 5 hörn, och varje hörn räknas tre gånger, vilket ger 20 hörn. Till höger: 1958 Sverige, Top Star. Samma symmetri, men fler paneler. 24 paneler, 40 hörn. Bilder: (en.wikipedia.org/wiki/List_of_FIFA_World_Cup_official_match_balls)

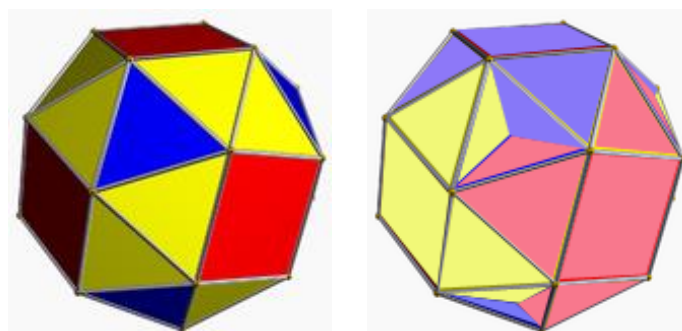
Även Brazuca från 2014, Figur 32, har kubisk symmetri med 90° rotationer men utan speglingar, så även denna grupp har ordningen 24. Man skulle alltså kunna göra en högerboll och en därifrån skild vänsterboll. En tränad fotbollsspelare skulle troligen upptäcka skillnaden och bli förvirrad.

Brazuca tangerade rekordet från 1930 vad gäller antal paneler och hörn. Enligt min uppfattning är det den elegantaste bollen hittills.



Figur 32. 2014 Brasilien, Brazuca. Kubisk symmetri utan spegling, 6 panelers "plus-tecken" eller "propellrar". Varje panel har 4 hörn, och varje hörn räknas tre gånger, så det blir 8 stycken hörn. Bollen tillverkas av plana långa element som lätt kan böjas i en riktning. Bild: (<https://www.soccercorner.com/Adidas-Brazuca-Official-Match-Ball-White-Night-Bl-p/eb-adg-73617.htm>).

Brazucan kan tänkas skapad från kroppen till vänster i Figur 33, *den skeva kuben*, en av de arkimediska kropparna. Gula trianglar läggs till intilliggande kvadrat. Blå trianglar utan gemensam sida med kvadrat delas upp mellan närliggande kvadrater, och hörnen på de delade trianglarna flyttas ut till klotytan. Sedan kan figuren finslipas: Man kan variera kvadraternas storlek och vridning, medan övriga sidor anpassas till kvadraterna och den ursprungliga kubens fyra hörn. Därefter rundas alla linjer av.



Figur 33. Till vänster: En skev kub. Bild: (Wikipedia, Arkimediska kroppar, 2014), (Webb, 2018). Till höger: Till de 6 kvadratiska sidorna har lagts intilliggande trianglar. De 8 mörkblå trianglarna i "kubens" hörn har delats upp mellan de närliggande kvadraterna. Detta har givit upphov till en skev kropp med 6 paneler, vilket är ett första steg till Brazuca.

Hans Block
2019-05-27

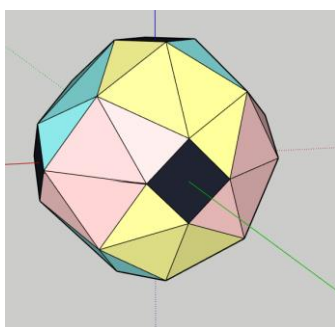
Årets boll, Telstar 18, Figur 34, är också elegant. Den har samma symmetrigrupp som Brazucan och därmed möjligheten till höger-och vänsterbollar.



Figur 34. 2018 Ryssland, Telstar 18. Kubisksymmetri utan spegling, 18 paneler, varv 6 kvadrater och 12 fyrhörningar, samt 32 hörn. Två parametrar finns att justera, kvadraternas storlek och vridning i förhållande till varandra.

Bild: (en.wikipedia.org/wiki/List_of_FIFA_World_Cup_official_match_balls)

Den kan tänkas uppkomma ur den skeva kuben genom att slå samman fyra trianglar.



Figur 35. Hur man förstår en Telstar 18. Man utgår från en skev kub som i Figur 33. Man låter de svarta kvadraterna glida isär, men behåller den inskrivna kuben med samma plan som de svarta kvadraterna. Därmed har man 32 hörn på klotytan. Mellan dessa hörn drar man linjer och får därmed en triangulering. Bild: Författaren.

Mångsidingenen i Figur 35 kan optimeras med hänsyn till rundheten definierad i avsnitt 5.1. Kvadraternas storlek är en parameter. Räkningarna antyder att kvadraterna bör göras med ungefär dubbla sidan, jämfört med Telstar 18.

En annan parameter är *skevheten*. Varje kvadrat kan i sitt eget plan vridas en viss vinkel kring sin mittpunkt. Längden på ytorna i polyedern blir därmed längre (eller kortare), och detta påverkar rundheten på polyedern och därmed också anpassningen av ytorna i Telstar 18.

Hans Block
2019-05-27

Adidas Nations League 2018/19, officiell matchboll för UEFA-cupen 2019, baseras på Telstar 18, men har paneler som mer påminner om Brazuca: Endast 6 paneler av samma slag, som skeva plustecken utgående från kubens sidor, här silverfärgade, men med ett kantigare utförande.



Figur 36. UEFA Nations League 2018/19. Bara 6 paneler! Bild: www.unisportstore.se.

En boll med samma symmetrigrupp men andra paneler är Reverse-Curl-It Pro från Bend-It. Tillverkaren säger att det är 12 paneler, men jag räknar de 8 som definierar symmetrin, och förmodar att 4 går åt till ventilen, på vilken man tillråds att sparka för att få extra kraft. De 8 reguljära panelerna kan överföras till varandra och vridas på tre sätt, medan spegling saknas, så symmetrigruppen får ordningen 24.



Figur 37. 2018 BEND-IT, Reverse-Curl-It Pro. Panelerna är förvridna triangulära, och topologin är som en oktaeder. Bollen kan inte speglas.

Hans Block
2019-05-27

Bollen Teamgeist från 2006, se Figur 38, har också kubisk symmetri utan 90° vridningar. Hörnpanelerna har en form som påminner om propellrar, vilket gör att varje hörnpanelerna får en riktning och varje "kvadratsida" får en riktning. Tillverkningen visas i (Adidas, Adidas Teamgeist Berlin, 2006). Teamgeist har alltså inte speglingsymmetri, utan symmetrigruppen har för första gången den låga ordningen 12.



Figur 38. 2006 Tyskland, Teamgeist. Kubisk symmetri utan 90° rotation. Bollen hade 14 paneler, varav 6 st. breda åttor och 8 "propellrar" i hörnen samt 24 hörn.

Bild: (en.wikipedia.org/wiki/List_of_FIFA_World_Cup_official_match_balls)

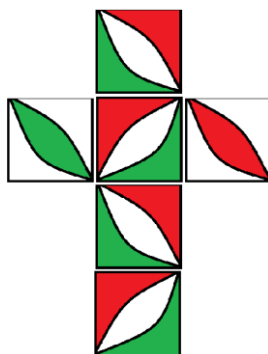


Figur 39. Panelerna i Teamgeist-bollen. Båda sorternas paneler, de för kubens sidor och de för kubens hörn, var tredimensionella vid sammansättningen. Panelerna för hörnen är tydligt osymmetriska vad gäller spegling.

Samma symmetri, men med helt annan skärning på panelerna, visar volleybollen Flistatec från 2009, Figur 40. Man utgår från att en kub med sidor som i Figur 41. Det finns två sorters paneler, en triangelformad i 12 exemplar och en S-formad i 6 exemplar. Panelerna möts i väsentligen två sorters hörn, fyra av varje slag. Däremot är "trianglarna" inte symmetriska utan buktar ut på en sida och buktar in på en annan, och hörnen som förenar 9 paneler måste av konstruktionsskäl delas upp i sex hörn. Ändå kvarstår kubisk symmetri utan rotation 90° och utan spegling, en grupp av ordningen 12. Samma gäller för fotbollen Teamgeist. De två bollarna har samma symmetrigrupp, fastän de ser så olika ut.



Figur 40. Volleyboll Flistatec med kubsymmetri. Bild: www.sportime.se och www.ebay.com
www.sprtshop.com



Figur 41. Flistatecs symmetri förenklad och utlagd på en kubs sidor.

Färgerna förstör symmetrin. Om också färgerna skall bevaras under vridningarna, så återstår en enda symmetrigrupp av ordningen 2, en rotation 180° kring axeln mellan ytorna med två vita paneler. Om grönt och rött likställs, får symmetrigruppen ordningen 4. Att färger förstör symmetrin är ingenting typiskt för denna boll.

Bollen har säkert gjorts med tanke på att volleybollar är rotationssymmetriska, och tittar man bara på ett hörn får man en felaktig känsla av rotationssymmetri av ordningen 9.

7.6 Dodekaedersymmetrier

Under slutet av 50-talet eller början av 60-talet introducerade den danska firman Select Sport *dodekaedersymmetrin*, (en.wikipedia.org/wiki/Select_Sport). Firman tillverkade och marknadsförde fotbollar i form av den arkimediska kroppen den *stympade ikosaedern*, och har 32 paneler, varav 12 femhörningar och 20 sexhörningar, 60 hörn och 90 kanter. 1970 använde Adidas denna form till matchboll i VM och kallade bollen Telstar. Sådana bollar är nu bland de allra vanligaste, målade i olika varianter.



Figur 42. 1970 Mexiko, Telstar. Dodekaeder-symmetri, 32 paneler. Bollen är en arkimedisk kropp, som kan göras genom att man kapar hörnen på en ikosaeder. Rundheten är 0,903.

Bild: (www.flickr.com/photos/shine2010/4171467668)

Denna boll kan göras rundare. Hörnen på ikosaedern är kapade på så sätt att det uppstår liksidiga sexhörningar. Dessa blir större än femhörningarna, och borde minskas för att rundheten skulle bli bättre. Rundheten är en enkel funktion av hur mycket man kapar, och varje student med elementära kunskaper i analys och geometri kan finna var maximum skall inträffa. Enligt (Lenguel) hittades den bästa kroppen med rundheten 0,9058 redan i

(Goldberg, 1935). Det var en prestation att komma på detta. Konstruktionen framgår av en patentansökan (Huybers, United States Patent Application Publication Pub. No.: US 2010/0130317 A1, Huybers Pub. Date: May 27, 2010). Se Figur 43.

Vad som är optimalt är inte helt givet. Skall man hitta en riktigt bra boll måste man dessutom ta hänsyn till luftryck och materialegenskaper. Detta framgår av (Lengyel, 2017).



Figur 43. Bollar med samma symmetri. Båda är stympade ikosaedrar, men femhörningarna har fått växa sig större och sexhörningarna har blivit mindre och oregelbundna, så bollen blir rundare. Stympningarna har gått olika långt. Till vänster: Uppfinnaren original. Bild: (Lengyel, 2017). Till höger: 2018 Puma Final 2 matchboll. Bild: www.xxl.se

Fler optimeringar av samme författare finns i (Huybers, In Search of the Roundest Soccer Ball, 2006).

Till UEFA Champions League 2019 i Madrid har Adidas tagit fram en boll med samma symmetri och lika många paneler som Telstar. Panelerna är femuddiga stjärnor och oregelbundna sexhörningar. Dessutom finns repliker med samma utseende men andra paneler: hela femhörningar och trianglar. Se Figur 44.



Figur 44. Till vänster: I den vanliga fotbollen har femhörningarna blivit stjärnor och sexhörningarna har fått lika sidor men olika vinklar. Femhörningarna därmed har blivit större, men strålarna på stjärnorna är lätta att vika. I topologisk mening är detta en arkimediskropp, ikosidodekaedern, med 12 femhörningar och 20 trianglar. Bild: football-balls.com. Till höger: Repliken av denna boll har likadan målning, men panelerna bildar precis en ikosidodekaeder. Bild: www.unisportstore.se

Hans Block
2019-05-27

Ikosaedern har använts i Mitre Delta Legend Hyperseam 2018.



Figur 45. En platonskropp som fotboll, även om några trianglar har slagits ihop till att ge bara 14 paneler. Nya material har gjort det möjligt. Bild: footballshirtculture.com.

Nya tillverkningsmetoder gör sökandet efter särskilt runda polyedrar onödig. Även en vanlig dodekaeder kan användas:



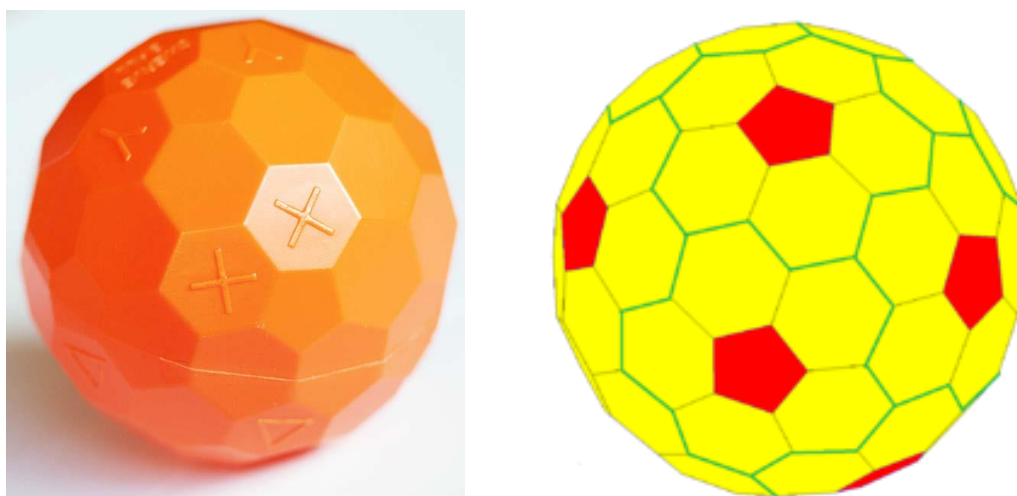
Figur 46. Till vänster: 2017 Nike Ordem 4 Premier League Soccer Ball. En dodekaeder. Bild: www.pinterest.se.

Till höger: Nike Football Pitch Premier League. Samma paneler används, men målningen av bollen gör att en undergrupp till dodekaedergruppen framhävs, nämligen en fullständig tetraedersymmetrigrupp, samma som i Nike Merlin i Figur 22. Bild: www.unisportstore.se

Dodekaedersymmetri finns i några basebollar, kallade *Blitzball* eller *Swerveball*. De är förvånansvärt komplicerade och består av regelbundna femhörningar och många nästan regelbundna sexhörningar, i princip som i Figur 7, fast enklare.

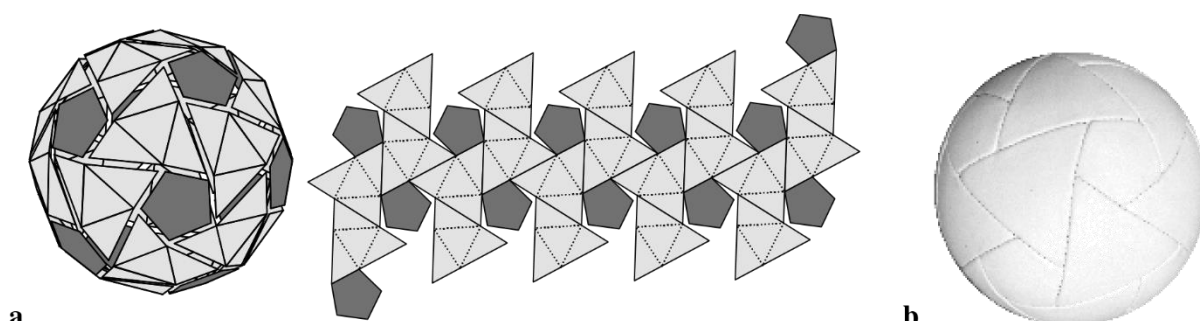
Formen kommer från en familj av kroppar av fem-och sexhörningar. Kropparna kallas Goldbergs polyedrar. Redan Eulers sats, rent topologiska argument utan några symmetrivillkor, för med sig att antalet femhörningar måste vara 12. Swerve-bollen sägs vara i *klassen III* och ha *frekvensen (1, 2)*, och därmed ha 72 sidor, varav 12 är femhörningar och 60 sexhörningar, 140 hörn och 210 kanter.

Avsikten är att bollarna skall vara ganska runda, men med stor Magnuseffekt, (böjd bana vid skruv enligt Figur 11). Detta kräver en ojämn yta. Eftersom bollen är gjuten i plast, finns det inga svårigheter vid tillverkningen, utan antalet sidor kan vara mycket stort. Se Figur 47. Källa: (Wikipedia, Goldberg polyhedron, 2018)



Figur 47. Till vänster: 2018 Swerve Ball, avsedd för baseboll. En mycket komplicerad kropp, gjuten i två halvor av billig plast. Foto: Författaren. Till höger: Den goldbergekropp av kategori III (2,1) som bollen bygger på. Bild: (Wikipedia, Goldberg polyhedron, 2018), User:Tomruen - Own work.

Dodekaedersymmetri utan spegling har föreslagits av Huybers:



Figur 48. I en skev dodekaeder **a** slås trianglarna ihop fyra och fyra enligt **b** vilken ger en figur som prototypbollen **c**. Källa till idé och bild: (Huybers, *In Search of the Roundest Soccer Ball*, 2006). FIFA godkände inte bollen, bl.a. med hänsyn till sömmarnas längd.

Hubers lät sy upp denna boll i några prototyper, som han skickade till FIFA, men designen blev inte godkänd på grund av för långa sömmar.

8 Tänkbara matchbollar till VM 2022

Adidas uppger att utvecklingen av Telstar 18 pågick i fyra år. Säkerligen har företaget redan nu påbörjat utvecklingen av matchbollen för VM i Qatar 2022. Jag undrar hur denna kommer att se ut.

Kanske har ingenjörerna redan hittat den bästa tänkbara bollen. Eftersom antalet ändliga symmetrigrupper i tre dimensioner är så litet, finns inte så många alternativ. Adidas kan gå tre olika vägar.

8.1 Måla om gamla bollar

Under nära 30 års tid, 1974 – 2002 hände ingenting väsentligt inom bollarnas topologi. Alla bollar byggde på den stympade ikosaedern, fast de målades som för att dölja detta faktum. Nu kan Adidas i stället måla om Brazucan eller Telstar 18.

8.2 Ändra parametrar

En enkel åtgärd skulle vara att ändra *parametrar* till tidigare fotbollar. Årets *Telstar 18* har kvadraternas storlek och vridning som parameter. Kvadraterna kan göras större, medan övriga paneler blir längre men smalare, eller tvärtom. Kvadraterna kan vridas kring sin mittpunkt och ytterligare öka asymmetrin. Detta skulle ge ytterligare en frihetsgrad för övriga paneler. Målet att göra dessa längre och smalare. Min intuitiva uppfattning är att Telstar 18 har för små kvadrater.

Teamgeist ser nästan speglingsbar ut, men är det inte. En möjlighet är att göra de 8 "propellrarna" mer skeva och låta de 6 "åttorna" gå mera diagonalt över kubytan.

8.3 Arkimediska och andra kroppar

Arkimediska kroppar är bra utgångspunkter. I (Huybers, In Search of the Roundest Soccer Ball, 2006) nämns fyra metoder för att få en rundare boll:

There are four possible approaches for the solution of this problem:

1. Choose a basic form, that has a surface area that is closer to that of the circumscribed sphere.
2. Choose a basic form, which has a volume that is closer to that of this sphere.
3. Change the form of the original basic mathematical figure, so that all faces get the same distance from the centre (become isodistant) and that all have the same surface area.
4. Find a form, where the faces have the largest possible distance from the centre: less different from the radius.

Vilken av dessa metoder som skall användas är inte självklart. Definitionen på rundhet, given i avsnitt 3.5, anknyter till lika-omkrets-problemet i tre dimensioner, och känns därför naturlig för en matematiker. Från denna definition är sätt 1 och 2 ekvivalenta. FIFA:s definition av rundhet passar bättre till punkt 4, och sätt 3 verkar också rimligt. Jag föredrar att mäta rundhet som ovan.

En annan aspekt är hur man vill variera polyedrar och ändå behålla symmetrin. Jag utgår från arkimediska kroppar. Man kan se dessa stympade platonska kroppar. Stympningen kan göras mer eller mindre hårt, och man varierar graden av stympning för att optimera rundheten. Är kropparna speglingsbara, kan man vrida vissa ytor lika mycket i sina egna plan och därvid behålla samtliga symmetrier utom spegling. När graden av stympning och vridning är givna, är det enkelt att räkna ut rundheten. Optimum fås genom ett enkelt numeriskt minimiproblem i två variabler.

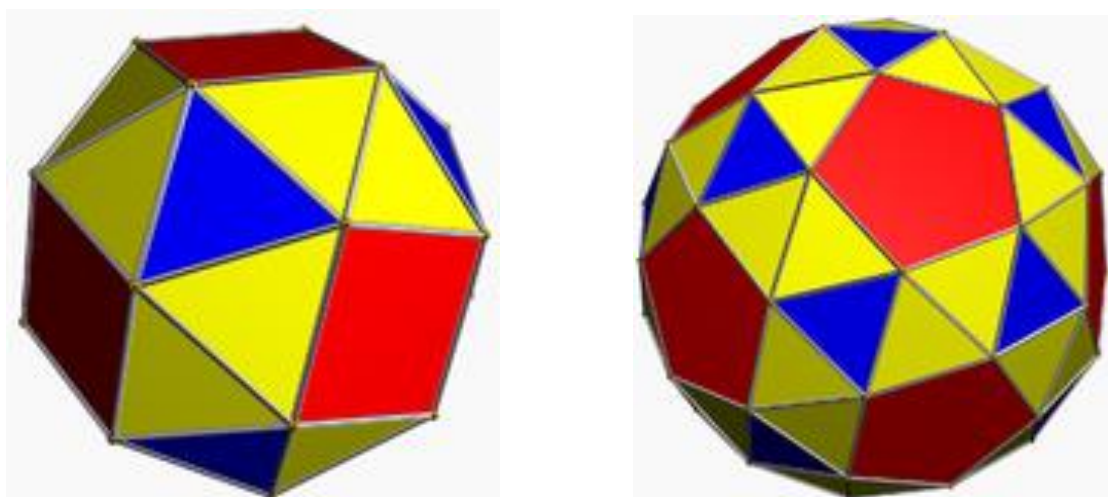
Ett annat sätt är att använda ett nödvändigt villkor för den rundaste kroppen, att alla sidor måste tangeras av det inskrivna klotet.

Alla optimerar inte efter samma kriterier, så resultaten blir olika. Detta är tydligt i Figur 43.

Efter optimeringen kan man slå samman paneler. Är dessa smala, så kan de vikas och man får mycket runda bollar.

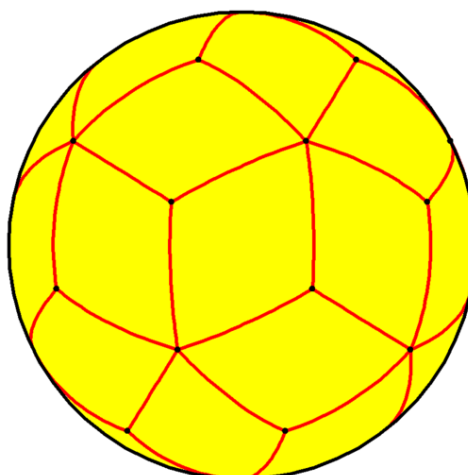
Arkimediska kroppar med många sidor kan bli fotbollar. Ett exempel är *den skeva kuben*, till vänster i Figur 49 nedan, med kubisk symmetri-grupp bortsett från speglingar. Den skeva kuben har 38 paneler, varav 32 trianglar och 6 kvadrater samt 24 hörn, vilket är något mer än den klassiska fotbollen. Dessutom är den skeva kuben inte lika rund som den vanliga bollen med 32 paneler.

Ett annat alternativ är *den skeva dodekaedern*, till höger i Figur 49 nedan, som har dodekaederns symmetri-grupp, bortsett ifrån speglingar. Den har hela 92 paneler, varav 80 trianglar och 12 femhörningar samt 60 hörn. Detta är ett högt pris att betala för en polyeder som bara är litet rundare än den klassiska fotbollen med 32 paneler.



Figur 49. Två arkimediska kroppar. Till vänster en skev kub, rundhet 0,899, till höger en skev dodekaeder, rundhet 0,947. Bilder: (Wikipedia, Arkimediska kroppar, 2014), (Webb, 2018).

En kropp som inte har provats är *den rombiska 30-sidingen* (Figur 50).



Figur 50. Rombisk 30-siding. Bollen har full dodekaedersymmetri med 30 sidor. Tack vare att romberna är långsmala finns förutsättningar att anpassa dem väl till klotytan. Bild: (Wiki, Rhombic Triacontahedron, 2018), Spherical rhombic triacontahedron.png, Tomruen - Own work.

Den finns beskriven i (Wiki, Rhombic Triacontahedron, 2018). Den är dual till en arkimedisk kropp, ikosidodeka-edern. Enligt samma källa är rundheten

$$36\pi \cdot V^2/A^3 = \pi \cdot (2+\sqrt{5})/15 \approx 0,887,$$

vilket inte är lika bra som den bästa 30-sidingen, se (Lenguel), och inte heller så bra som den vanliga fotbollen Telstar, som enligt (Huybers, In Search of the Roundest Soccer Ball, 2006) har rundheten 0,903. Visserligen tangerar det inskrivna klotet alla sidor av polyedern, men panelerna är avlånga.

Denna kropp är i uppblåst form avbildad i Figur 50. Den har egenskapen att vara *kanttransitiv*, d.v.s. varje kant kan överföras till en annan kant så att polyedern fortfarande upptar samma område som förut.

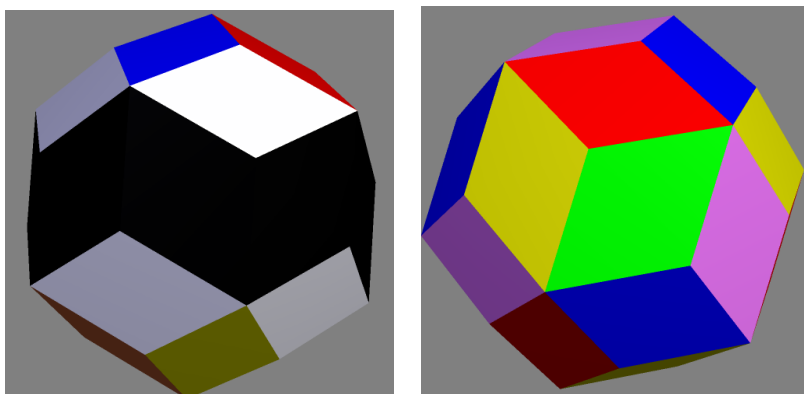
Kroppen kan tänkas uppkomma på flera sätt. Ett sätt utgår från *kuben*, och detta visas som animation i (Wiki, Rhombic Triacontahedron, 2018). Själv föredrar jag att tänka på en *dodekaeder*, där man över varje kant lägger en romb som förenar mittpunkterna på kantens femhörningar, och dessa romber vikas på mitten. Därefter förs femhörningarnas mittpunkter ut på det omskrivna klotet.

Denna kropp är väldigt symmetrisk och har färre paneler än Telstar. Dessutom finns bara en sorts panel, vilket borde minska tillverkningskostnaden. Panelerna är avlånga och kan därför vikas utan större besvär, vilket ökar rundheten när bollen blåses upp.

Någon kan tycka att denna kropp är enformig och inte ger något fäste för blicken. Detta kan åtgärdas med en konstnärlig målning, och detta kräver i sin tur en god färgning som grund. Jag ser två alternativ för färgningen.

Ett sätt är att bevara *rotationssymmetrin*. Då delar man upp kroppen i *polerna*, som består av fem paneler som hänger ihop i ett hörn, *polcirkelarna*, fem paneler omedelbart intill. Resterande tio paneler bildar *ekvatorn*. Använder man fem färger till polerna, en färg till polcirkelarna och en färg till ekvatorn, allt som allt 7 färger, så får man en dihedral 5-grupp av ordningen 20, om man inte skiljer mellan de fem färgerna till polerna.

Mer symmetri bevaras om man använder 5 färger. Det betyder, att varje färg måste användas av sex paneler, som inte får gränsa till varandra. Ett sätt att isolera dem är att använda en kubisk undergrupp. Dodekaedern har sex kanter med tre med räta vinklar sinsemellan. Sådana kanter täcks av paneler av samma färg. Denna färgning visar tydligt fem olika undergrupper av kubisk symmetri.



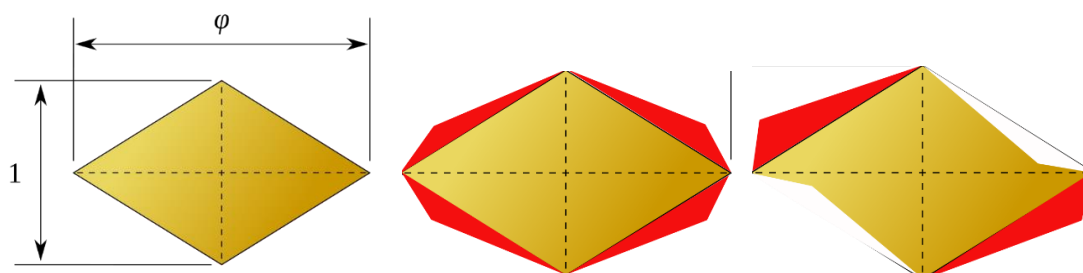
Figur 51. Två färgningar av den rombiska 30-sidingen. Till vänster: Polerna målas i fem färger, sedan målas polcirkelarna vita och ekvatorn svart. Till höger: Kubsymmetrin framhävs. Paneler med räta vinklar i förhållande till varandra målas i samma färg. 5 färger räcker. Bilder: (Webb, 2018).

Att använda 4 färger är möjligt enligt fyrfärgssatsen. Däremot blir resultatet osymmetriskt, redan på grund av antalen av paneler och färger.

Panelernas utseende framgår av Figur 52 vänster. I polyedern är enligt (Wiki, Rhombic Triacantahedron, 2018) kvoten φ mellan den långa och korta diagonalen det gyllene snittet. Det betyder, att den spetsiga vinkeln i romben blir $63,43^\circ$ och den trubbiga $116,57^\circ$.

I en uppblåst boll är vinklarna annorlunda. Det finns två sorter hörn, där tre respektive fem paneler möts. Av symmetriskäl skall vinklarna för varje panel i hörnet vara lika stora. Vinklarna i fyrhörningarna blir alltså 72° respektive 120° .

För att ge en rund boll måste panelerna förändras. Schematiskt kan detta ske som i Figur 52 mitten. Man kan också göra utvidgningen litet större på varannan sida och förminska vid de återstående två sidorna, som i Figur 52 höger.



Figur 52. Panelerna i den rombiska 30-sidingen. För att sidorna skall passa när man klistrar dem på kuben måste vinklarna ökas till 72° respektive 120° , vilket svarar mot de röda ytorna i figuren i mitten. I den högra bilden har ändringen gjorts så att speglingssymmetrin försvinner. Då blir panelerna lättare att böja. I verkliga bollar skall panelerna rundas av. Vänstra bilden från (Wiki, Rhombic Triacantahedron, 2018), Zom-B (Original); Pbroks13 (Derivative), mitt- och högerbilderna är ändrade av författaren.

Genom att se på en modell av 30-sidingen ser man, att förändringen kan införas konsistent över hela polyedern. Speglingssymmetrin försvinner, och figuren blir intressantare.

Panelernas topologi innebär, att fem paneler möts i 12 av de 32 hörnen, medan tre paneler möts i de återstående 20 hörnen. Bollen blir troligen hårdare när en spelare sparkar på ett 5-hörn. Å andra sidan finns inga punkter med stort avstånd till närmaste sida.

Sömmarna är nästan dubbelt så långa som på en dodekaeder med samma kantlängd.

8.4 Grupper utan speglingar

Adidas senaste fotbollar och volleybollen Mikasa MVA200 och Moltens volleyboll Flistatec saknar speglingar. För att få något nytt, bör man fortsätta på denna väg och göra *bollar utan speglingssymmetri*. Detta är mitt huvudspår.

Det finns fyra symmetrigrupper att välja på: rotationer, tetraeder, kub och dodekaeder.

Rotationssymmetrier

Rotationssymmetriska bollar används inom basketboll och de få möjligheterna verkar vara uttömda. Dessutom är rotationssymmetrin utesluten på grund av att den ger ett annorlunda tillslag på polerna.

Tetraedersymmetrier

har inte så många möjligheter. Jag vill använda tetraederns symmetrigrupp utan speglingar.

I förteckningar över polyedrar kallar man ibland ikosaedern för *den skeva tetraedern*, vilket hänger samman med att ikosaedern och tetraedern har en undergrupp tillsammans. Det är fantasilöst att använda en platonsk kropp, som dessutom redan finns implementerad i Mitre Delta.

I stället skapar jag en skev tetraeder på samma sätt som man kan göra skeva kroppar till kubgruppen och dodekaedergruppen. Jag utgår från en stympad tetraeder, inskriven i enhetsklotet enligt Figur 53.

Jag fixerar de fyra bruna axlarna som går genom origo, en mittpunkt i en sexhörning och en mittpunkt i en triangel. Vi börjar med att dela upp varje sexhörning i sex trianglar, och att flytta ett av varje triangels hörn till skärningspunkten mellan symmetriaxeln (brun) och enhetsklotet.

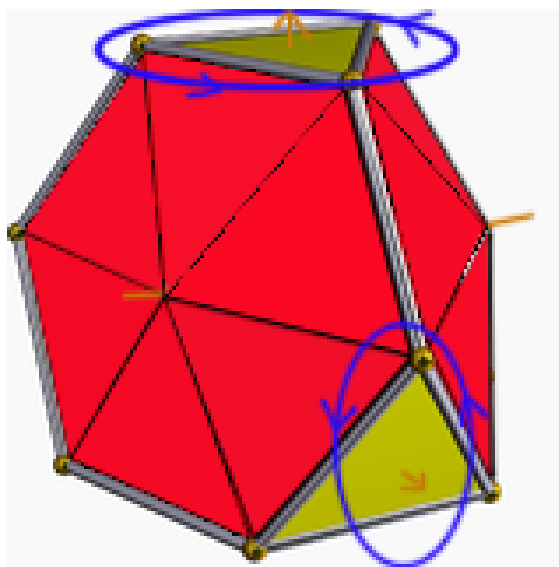
Med bibehållande av tetraederns symmetrigrupp kan vi låta var och en av de liksidiga trianglarna flyttas parallellt med sig själva längs sin bruna axel, men så, att hörnen ligger kvar på enhetsklotet. Låt avståndet från de nya ytorna till origo vara h .

Ytorna som förbinder två hörn i tre trianglar (rött på figuren) blir fortfarande sexhörningar, men oregelbundna. Dessa ytor kommer också att förflyttas längs samma axlar, men om h ökar, så kommer de röda ytorna att närma sig origo, och fjärma sig om h minskar. Ytterligheterna är att de oregelbundna sexhörningarna reduceras till trianglar. I ena ändan får man en hel tetraeder, i andra ändan en oktaeder. Alla dessa kroppar har full tetraedersymmetri.

Om man förmodar att maximal längd på trianglarnas sidor har betydelse för rundheten, så ser man att detta värde inte är som minst för en traditionellt stympad tetraeder med utsvällda sexkanter enligt Figur 53.

Därefter låter vi varje gul triangel vridas samma vinkel φ° moturs, där φ är positivt eller negativt, medan angränsande kanter hänger med. Det har fortfarande 28 sidor och tetraedersymmetri utan speglingar. Åtminstone vid små förändringar är den fortfarande konvex.

Denna polyeder har som sidor 28 trianglar, varav 4 är liksidiga, och de övriga inte ens likbenta. Polyedern har 20 hörn och 42 kanter. Resultatet framgår av Figur 53.



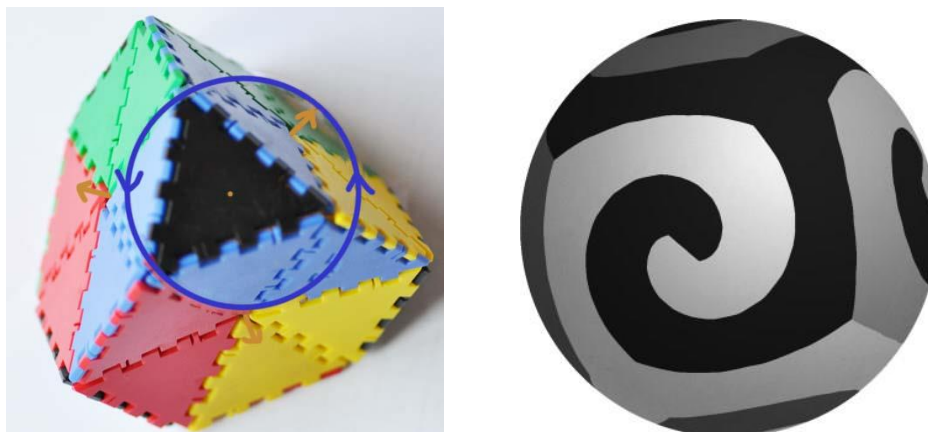
Figur 53. Skev tetraeder skapas. Den stympade tetraedern har fyra symmetriaxlar, markerade med brunt. Till att börja med delas de röda sexhörningarna upp i sex trianglar var. Ett hörn ligger i skärningen mellan en brun symmetriaxel och klotytan. Därefter förskjuts de gula trianglarna lika sträcka längs de bruna linjerna och roteras samma vinkel längs samma linjer. All symmetri utom speglingen bibehålls. Symmetrigruppen får ordningen 12. Bild: Författaren, bygger på (Wikipedia, Arkimediska kroppar, 2014), (Webb, 2018).

Parametrarna h och φ kan bestämmas så att denna polyederns rundhet maximeras eller maximala panelbredd minimeras, allt enligt avsnitt 5.

Det är spännande att föreslå en 28-siding, därför att denna kropp sällan är nämnd i uppräknningar över polyedrar. Den finns inte med i listan över förmodat optimalt runda polyedrar med n sidor i (Lenguel). Det grekiska namnet *icosioctagon* är reserverat för en kropp med helt annan topologi, se en.wikipedia.org/wiki/Icosioctagon.

När polyedern är optimerad, så kan sidorna slås samman på lämpligt sätt. Man kan välja att varje liksidig triangel får två nya trianglar vid varje kant, vilket ger en Brazuca-liknande boll med bara fyra paneler, Figur 54. Endast rotationssymmetriska bollar som volleybollen Spalding och tennisbollen (Figur 15 och Figur 19) har färre paneler. De ställen där sex trianglar möts kan göras mer spännande genom att låta de tre panelerna stråla samman i en spiral, som redan (Swart, 2015) har visat, Figur 24.

Ett annat sätt är att slå ihop sidorna parvis, vilket åstadkommer en Telstar 18-liknande boll, även denna visad i Figur 54. Eftersom dessa paneler är långsmala, blir det bättre anpassning till klotytan än vad man först tror.



Figur 54. Vänster: En Telstar 18-liknande tetraeder. Liksom på tidigare figur skall mittpunkterna på sexhörningarna ut på klotytan. Efter rotation blir den skev, men redan sammanslagningen av panelerna gör denna boll skev. Byter man färgen på den svarta triangeln till ljusblå, får man i stället en Brazuca-liknande kropp, anpassad till tetraedersymmetri utan spegling. I brist på grafisk programvara har jag fotograferat en byggsats för lek. Höger: En Brazuca-liknande boll, baserad på tetraedersymmetri, gjord av (Swart, 2015) och redan visad i Figur 24. Den borde målas i fyra färger.

Med tanke på den kritik som Jabulani-bollen fick, så känns det vågat att föreslå tetraedersymmetri, och dessutom utan speglingar. Jag förmodar dock, att aerodynamiken på grund av en allt för slät boll var skadligare än anisotropin på grund av en allt för liten symmetrigrupp. Tillverkningsmetoderna är säkert bättre än de var 2010.

För Adidas återstår då uppgiften att välja produktionsmetod (behöver man använda färdiggjutna 3D-element, eller räcker det med trianglarna?) och sedan definiera ett mönster. Med tillräcklig skevhet och bra dekorationer kommer båda de föreslagna bollarna att avvika tillräckligt mycket från Jabulani-bollen.

Kubsymmetrier

har använts så mycket att det verkar vara svårt att hitta något nytt.

Dodekaedersymmetrier

De två senaste VM-bollarna kan anpassas till dodekaedergruppen.

Först tänkte jag göra en *dodekaedergrupp utan rotationer*. Den skulle i så fall ha ordningen högst 24, samma som kubgruppen utan antingen rotationer eller speglingar. I själva verket blir denna undergrupp isomorf med kubgruppen utan 90° rotationer. Ett sätt att tänka sig denna undergrupp är att slå samman intilliggande par av ytorna till dodekaedern, vilket skulle ge en boll av ett utseende snarlikt bollarna i Figur 29.

Av genomgången av gamla bollar framgick att knappast någon undergrupp är glömd.

Det enda nyskapande alternativet är att göra om Brazuca och Telstar 18 för dodekaederns symmetrigrupp utan speglingar. Tyvärr har jag inte tillgång till något passande matematiskt grafikprogram, så det blir bara skisser på sådana bollar.

Den nya *Dodekaeder-Brazuca* skapas från en vanlig fotboll, på samma sätt som Brazuca från 2014 skapas från en kuboktaeder. I den nya bollen utökas varje femhörning med en tredjedel av varje närliggande sexhörning. Det blir 12 paneler och 20 hörn, vilket är mindre än de flesta VM-bollarna. Se Figur 55.



Figur 55. Dodekaeder-Brazuca med 12 oregelbundna paneler.

”Propellerbladen” är smalare än femhörningarna, så man kan låta femhörningarna krympa. Dessa får då mindre maximal bredd och minskade problem med dubbelkrökning. Se Figur 56. Givetvis skall sedan alla hörn, utom de där tre paneler möts, jämnas ut.



Figur 56. Skiss av Dodekaeder-Brazuca med förminskade femhörningar.

Den nya *Dodekaeder-Telstar-18*, se Figur 57, har 12 femhörningar, och var och en av dem gränsar till fem krökta fyrhörningar. Dessa fyrhörningar räknas två gånger var, så det blir 30 fyrhörningar och 42 paneler totalt. Kroppen får 80 hörn och 120 kanter, inte mycket värre än den klassiska fotbollen.

Ett hörn av panelen möt av tre likadana paneler, så vinkeln i detta hörn blir 120° . I det andra hörnet fortsätter en linje från femhörning, vars inre vinkel är 108° . Panelens spetsiga vinkel blir därför 72° . För att kompensera detta skall de korta sidorna göras böjda, men de blir mindre böjda än i Telstar 18.



Figur 57. Dodekaeder-Telstar-18 med totalt 42 paneler.

Liksom i den tidigare skissen finns parametrar att justera. Femhörningarna kan bli mindre. Dessutom kan man vrida dem i sitt eget plan i samma vinkel moturs (eller medurs) utan att symmetrin drabbas. Vrider man mittsidan i figuren medurs, så blir fyrhörningarna längre och därmed bli mera lättböjliga. Skall man approximeras med en polyeder definieras fyrhörningarna av sex punkter på klotytan, och denna sexhörning måste sedan trianguleras med tre kanter per sexhörning. Därefter kan man beräkna rundheten av denna polyeder bestående av 12 stycken 5-hörningar och 120 oliksidiga trianglar av olika slag. Märk väl, att det inte är denna 132-siding som skall tillverkas, utan en utjämnad 42-siding, som dock har en rundhet, närmande sig 132-sidingens.

8.5 Aerodynamisk utformning

Mindre turbulens skulle ge mindre luftmotstånd, längre skott och stabilare banor. Det kanske skulle gå att göra fotbollens yta gropig som en golfboll. I stället gör man bollarna knottriga eller med sexkantsmönster. Sådant ger också bättre kontakt med bollen och möjliggör ökad skruv.

Frågan är om FIFA vill ha dessa effekter. Spelare har blivit dementa av hjärnskador i samband med nickning. Vill man undvika att öka hastigheten för att minska spelarnas skaderisk? Vad skulle hända, om det blev vanligt att målvakten kunde skjuta över hela planen och göra mål, som i filmen (www.youtube.com/watch?v=tdQtKRRL_94)?

Eller vad skulle hända, om målvakterna alltid kunde beräkna bollens bana i god tid? Skulle varje match då sluta med straffsparksläggning? Radikala förändringar av bollens egenskaper påverkar lagens spelstil.

8.6 Färga paneler

En speciell ommålning är att färga paneler. Detta innebär att en inskränkning av symmetrin, om man kräver att ytorna skall bevara sin färg vid transformationen. Den färgade bollens symmetrigrupp blir en undergrupp till den ofärgade bollens grupp.

En naturlig begränsning är att paneler med gemensam kant skall ha olika färger. *Fyrfärgssatsen* talar om, att på en sfär behövs bara fyra färger för en karta. Beviset är svårt och krävde dator för att behandla alla fall som kan uppträda.

Inskränkning av symmetri på grund av färgning kan vara vacker. För Brazucan i Figur 32 återstår en symmetrigrupp av ordningen 4: Två färgade hörn kan byta plats, och bollen kan roteras 180°. För Flisatec-bollen i Figur 40 återstår vid bevarande färger av en symmetrigrupp av ordningen 2. Om en dodekaeder skall färgas med bara fyra färger, så är det lätt att se att de tre ytorna med samma färg kan nås från ett hörn genom en kant. Detta ger en väsentligen entydig lösning. Med denna färgning har symmetrigruppen ordningen 1, d.v.s. all symmetri är borta. Fem färger bör inte användas, för då blir det inte samma antal paneler med lika färg. Färgas dodekaedern med sex färger, får vi som visats i Figur 29, en undergrupp av ordningen 24.

I somliga fall, t.ex. för 30-sidingen i Figur 50, kan färgningen bidra till en ökad förståelse av symmetrin.

8.7 Skönhet och nytta

Till slut lämnar jag matematiska och konstruktionstekniska krav och talar om *skönhet*.

Första tänker jag på skönheten hos ett tvåtusenårigt problem. Det har utretts fullständigt. Somliga av bevisen som jag mött – om än inte redovisat – har varit mycket vackra.

Det andra är att nya resultat fortfarande kommer fram. Numeriska metoder gör kartläggningen fullständigare. Approximationerna med hänsyn tagen till elasticitet och uppblåsning har blivit bättre.

Bollarna i uppsatsen inbjuder till övningar i tredimensionell uppfattning.

Flera bollar är direkt vackra. Man kan betrakta fotbollspanelerna på samma sätt som man ser klassisk islamsk konst som är underkastad bildförbudet och har tydliga matematiska influenser.

Att gradera skönheten hos en boll får mig att lämna vetenskapen och bli personlig. Jag vill hitta symmetrier som inte är triviala. En extra poäng är skevhet, för ögat är inte vant vid detta. Skevheten, om den finns, skall *framhävas*, som i *Mikasa MVA200*, och inte *döljas* som i Teamgeist.

En originell design som visade framåt hade bollen *Crack* från 1962, där symmetrigruppen var den vanliga, men panelernas form och krökning påminde om modernare bollar.

Ibland kan symmetrier locka på villovägar. Trots en förvånande design gillar jag inte volleybollen *Flisatec*, Figur 40. Den ger sken av att ha rotationssymmetri av ordningen 9, men detta är inte sant.

Puma Evopower har paneler av många olika slag, Den har flera långa paneler och verkar vara rund. Planen att betona latituderna är ovanlig.

Färgläggningen av bollar betyder mycket. Den kan framhäva eller dölja strukturen av paneler. Jag gillar inte när strukturer döljs, tex. i den annars så vackra Telstar 18, men där målningen för ögat på villovägar. Jag gillar inte heller *fusk*, som när den billiga bollen till höger i Figur 44 härmar formerna i den dyrare bollen till vänster, trots att panelernas utseende är annorlunda.

Bäst gillar jag *Brazucan*, för dess få paneler, skeva symmetri, välformade paneler och diskreta färgning.

När det gäller *nyttan*, så kan man hävda, att lika väl som musiker behöver goda instrument för att få en vacker och stark ton och uttrycka sina känslor, så behöver artisterna på en fotbollsplan fulländade bollar för att uttrycka *sina* konst.

Kanske spelar de studerade egenskaperna en begränsad roll. Visst vill både spelare och arrangörer ha bollar med hög och jämn kvalitet, spelarna för att deras trick skall gå hem och arrangörerna för att slippa befogade klagomål och hålla ryggen fri. Men panelernas form och topologi är troligen mindre väsentliga än tillverknings-procedurer och material.

Skådespelare och musiker känner extrem stress och blir vidskepliga när det gäller faktorer som de inte kan kontrollera men ändå måste finna sig i. Krav på hög kvalitet på bollar har att göra med divalater hos högt betalda personer, som uppför sig som barnungar.

En snäv definition av *nytta* är att hitta något som andra är villiga att betala för, d.v.s. något som man kan tjäna pengar på, vilket är företagares definition av ordet *intressant*. Tillverkarna konkurrerar sinsemellan och vill utöka sina marknadsandelar. Kunderna skall köpa nya bollar för varje tävling. Ingen tillverkare presenterar statistiska test av bollarna, än mindre teoretiska utsagor om bollarnas olika variabler. De låter, som bilförsäljare, kundernas känslor råda, och känslorna påverkas av produktens utseende.

I ett möte mellan högstämmd matematik och krassa ekonomiska intressen har jag njutit av ett 2000-årigt problem och dess vackra lösningar.

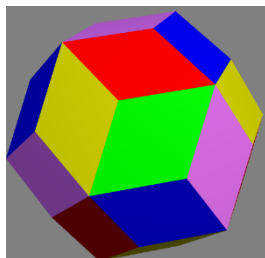


*Figur 58. Cykelspark. Bollarna skall göra artisteri möjligt. Bild: /en.wikipedia.org/wiki/Bicycle_kick
The original uploader was Weechie at English Wikipedia.*

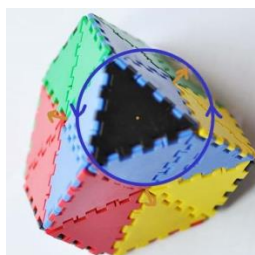
9 Sammanfattning av förslag

Jag föreslår fem olika bollar.

Den första är en *rombisk 30-siding* från dodekaedergruppen som aldrig har använts förut. Den är extremt symmetrisk, och tack vare långsmala paneler rundare än man kan tro. Den bör dekoreras med utgångspunkt från i fem färger med kubsymmetri. Panelerna – och därmed bollarna – kan göras icke speglingsbara.



Övriga fyra bollar är *skeva*. De använder en tetraedisk eller dodekaedrisk symmetrigrupp *utan speglingar*. Panelerna utgörs av sammanslagna paneler av kända kroppar. De arrangeras i analogi med de två senaste VM-bollarna, Brazuca eller Telstar 18.



Tetraeder-Brazucan finns beskriven i (Swart, 2015) och är avbildad i Figur 24. Panelernas form måste anpassas för att minska spillet vid tillverkningen. *Tetraeder-Telstar 18*-bollen är skisserad i Figur 54, men skall optimeras med hänsyn till de två parametrarna höjd på kapningen och vridningsvinkel.

Dodekaeder-Brazucan är skisserad i Figur 55 och Figur 56. Panelernas utseende måste ritas om och göras mer spiralformade för att bli tunnare och mer intressanta.

Dodekaeder-Telstar 18-bollen är skisserad i Figur 57. Utgångspunkten är 6-hörningar vars hörn är definierade på klotytan av de två parametrarna 5-hörningarnas storlek och vridning. 6-hörningarna trianguleras och optimeras sedan för att uppnå minsta bredd.



10 Referenser

- Adidas (Regissör). (2006). *Adidas Teamgeist Berlin* [Film].
- Adidas (Regissör). (2010). *Adidas JABULANI BALL production* [Film].
- Adidas (Regissör). (2013). *Brazuca Production Video* [Film].
- Channel, O. I. (Regissör). (2017). *Pingsider: how table tennis balls are made* [Film].
- classicfootballshop.com/t-model-1930. (u.d.). *T-ball 1930*.
- en.wikipedia.org/wiki/List_of_FIFA_World_Cup_official_match_balls. (u.d.). *List of FIFA World Cup official match balls*.
- en.wikipedia.org/wiki/Sphericity. (u.d.). Sphericity.
- en.wikipedia. (2018). *Euler characteristic*. Hämtat från en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic#Proof_of_Euler's_formula.
- Fan, Y.-J. a.-Y. (2018). From the "Brazuca" ball to Octahedral Fullerenes: Their Construction and Classification.
- FIFATV (Regissör). (2018). *7 essential measurements to test a FIFA World Cup™ football* [Film].
- Goldberg, M. (1935). The Isoperimetric Problem for Polyhedra. *Tóhuku Math. J.*1935, 40, 226-236.
- Halbeisen, L. J. (u.d.). *Group Theory, Module 210PMA208*. Universität Zürich, user.math.uzh.ch/halbeisen/4students/gt.html.
- Hehl, A. (2013). *The Isoperimetric Inequality*. Hämtat från www.math.uni-tuebingen.de/ab/GeometrieWerkstatt/IsoperimetricInequality.pdf.
- Huybers, P. (2006). In Search of the Roundest Soccer Ball. *International Conference On Adaptable Building Structures Eindhoven The Netherlands 03-05 July 2006* . Eindhoven: www.irbnet.de/daten/iconda/CIB10895.pdf.
- Huybers, P. (2013). The Roundness of Polyhedra. *Symmetry Festival 2013 pp. 26 - 36*. festival.symmetry.hu/wp-content/uploads/2015/01/Huybers_Abstract.pdf.
- Huybers, P. (u.d.). *United States Patent Application Publication Pub. No.: US 2010/0130317 A1, Huybers Pub. Date: May 27, 2010*.
- International Floorball Federation. (2018). *Rules of the Game, Rules and Interpretations, Valid from 1st July 2018*. Hämtat från www.floorball.org/pages/EN/Rules-of-the-game-.
- Kickerball, T. (Regissör). (2018). *Kickerball Challenge*, www.youtube.com/watch?v=2pruRtitFzQ [Film].
- Lenguel, A. a. (u.d.). The Roundest Polyhedra with Symmetry Constraints, András Lengyel, Zsolt Gáspár and Tibor Tarnai. *Symmetry* 2017, 9;41;(http://www.mdpi.com/2073-8994/9/3/41/htm).
- Lengyel, A. a. (2017). Optimization of the roundness of the soccer ball.
- Luthy, P. (2008). *Two Cute Proofs of the Isoperimetric Inequality*. Hämtat från cornellmath.wordpress.com/2008/05/16/two-cute-proofs-of-the-isoperimetric-inequality/.
- medium.com/the-physics-arxiv-blog. (2018). *From the "Brazuca" ball to Octahedral Fullerenes: Their Construction and Classification*. Hämtat från arxiv.org/abs/1406.7058 :.
- Mikasa (Regissör). (2018). *Production of volleyball balls* [Film].
- Moltensports (Regissör). (2009). *Molten FLISTATEC Volleyballs* [Film].
- O'Connor, J. (2003). *Topics in Geometry, Course MT3818 T*. www-history.mcs.st-and.ac.uk/~john/geometry/Lectures/L11.html.

Hans Block
2019-05-27

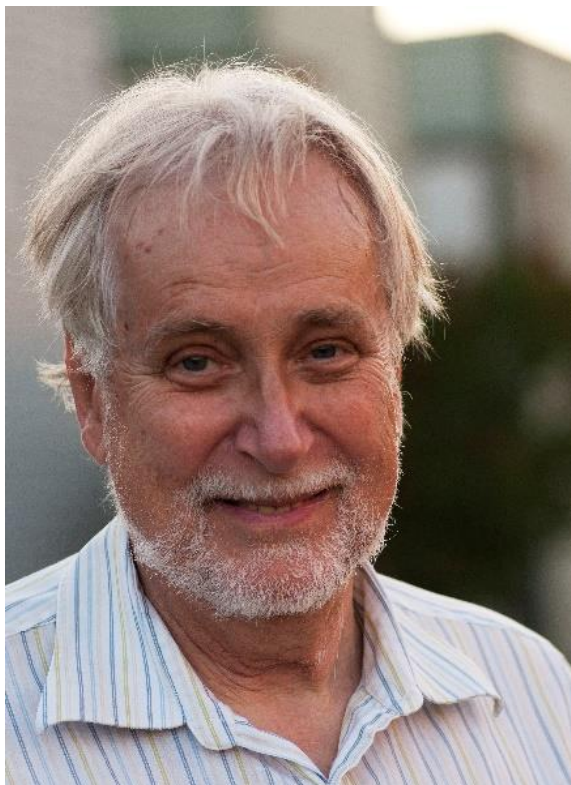
- picclick.co.uk/The-official-ball-of-the-1962-FIFA-World-232727353746.html. (u.d.).
Crack boll, Chile 1962.
- RobertLovesPi. (u.d.). A Gallery of Twenty-One Polyhedra with Icosidodecahedral Symmetry. *robertlovespi.net/2014/06/13/a-gallery-of-twenty-one-polyhedra-with-icosidodecahedral-symmetry/.*
- Salzberg, S. (2013). *The Physics of Golf.* Hämtat från genome.fieldofscience.com/2013/04/the-physics-of-golf.html.
- Scott, J. (2005). *Golf Ball Dimples & Drag.* www.aerospaceweb.org/question/aerodynamics/q0215.shtml.
- Skouras, T. K. (2014). Designing inflatable structures. *ACM Transactions on Graphics (TOG) TOG Homepage, Volume 33 Issue 4, July 2014, Article No. 63.*
- soccerballcollection.com/HISTORY.htm. (u.d.). *Soccer Balls collection.*
- Stevens, J. (2013). *The Isoperimetric Inequality.* Hämtat från www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMG720/V13/isoperi_en.pdf.
- Swart, D. (2015). Soccer Ball Symmetry. *Proceedings of Bridges 2015: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, archive.bridgesmathart.org/2015/bridges2015-151.pdf.* Baltimore, Maryland, USA.
- Unisport (Regissör). (2017). *BEST FOOTBALL 2017 DISCUSSION | Unisport Uncut Ep. 32 [Film].*
- Webb, R. (2018). *Great Stella Software.* Hämtat från www.software3d.com/Stella.php.
- Wiki. (2018). *Cricket ball.* Hämtat från en.wikipedia.org/wiki/Cricket_ball#/media/File:White_ball_2.JPG.
- Wiki. (2018). *Rhombic Triacontahedron.* Hämtat från en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_triacontahedron.
- Wikipedia. (2014). *Arkimediska kroppar.* Hämtat från sv.wikipedia.org/wiki/Arkimediska_kroppar.
- Wikipedia. (2018). *Goldberg polyhedron.* Hämtat från en.wikipedia.org/wiki/Goldberg_polyhedron.
- www.flickr.com/photos/shine2010/4171467668. (u.d.). *Telstar Mexiko 1970.*
- www.guinnessworldrecords.com/world-records/fastest-golf-drive/. (2019). *Fastest golf drive.*
- www.indiamart.com. (u.d.). *Modern basketboll.*
- www.soccerballworld.com/History.htm. (u.d.). *The History of the Soccer Ball.*
- www.soccercorner.com/Adidas-Brazuca-Official-Match-Ball-White-Night-Bl-p/eb-adg73617.htm. (u.d.). *Brazuca 2014.*
- www.youtube.com/watch?v=rOa_xL2lLxQ. (u.d.). *10 fastest shots.*
- www.youtube.com/watch?v=tdQtKRRL_94. (u.d.). *Long shots goalkeeper.*

11 Några bollars egenskaper

Figur	Namn	Symmetrigrupp	Ordning	Panel1		Panel 2		Paneller Totalt	Hörn	Kanter
				Kanter	Antal	Kanter	Antal			
Figur 13	Bordtennis	Oändlig rotation	∞	1	2	0	0	2	0	1
Figur 14	Badboll	Rotation 6	24	4	6	6	2	8	12	18
Figur 15	Basket Spalding	Rotation 4	16	1	2	0	0	2	0	1
Figur 15	Volleyboll MVA200	Rotation 4 - spegling	8	3	8	0	0	8	6	12
Figur 16	Innebandy	Rotation 4 - spegling	8							
Figur 17	1900 fotboll läder	Rotation 2	8	4	4	2	4	8	6	12
Figur 17	Basket modern	Rotation 2	8	4	4	2	4	8	6	12
Figur 18	2016 Evopower ^[1]	Rotation 2	8					22	40	60
Figur 19	Tennis, baseboll	Rotation 2	8	1	2	0	0	2	0	1
Figur 20	Cricket	Rotation 2 - spegling	4	3	4	0	0	4	4	6
Figur 21	2010 Jabulani	Tetraeder	24	3	4	6	4	8	10	16
Figur 22	2018 Nike Merlin	Tetraeder	24	3	4	0	0	4	4	6
Figur 23	2017 New Balance F.	Tetraeder	24	6	6	4	12	18	32	48
Figur 24	Swart, förslag	Tetraeder - spegling	12	3	4	0	0	4	4	6
Figur 25	1963 Santiago	Full kubisk	48	4	6	6	12	18	32	48
Figur 26	Huybers ^[2]	Full kubisk	48	8	6	6	8	26	48	72
Figur 27	Stympad oktaeder	Full kubisk	48	6	8	4	6	14	24	36
Figur 28	1962 Crack	Kubisk - 90° rotation	24	4	6	6	12	18	32	48
Figur 29	1930 T-modell	Kubisk - 90° rotation	24	4	12	0	0	12	20	30
Figur 30	Basket Smash	Kubisk - 90° rotation	24	4	6	0	0	6	8	12
Figur 31	1950 Superboll	Kubisk - 90° rotation	24	5	12	0	0	12	20	30
Figur 31	1958 Top-Star	Kubisk - 90° rotation	24	6	12	4	12	24	44	66
Figur 32	2014 Brazuca	Kubisk - spegling	24	4	6	0	0	6	8	12
Figur 49	Skev kub	Kubisk - spegling	24	3	32	4	6	38	24	60
Figur 34	2018 Telstar 18	Kubisk - spegling	24	4	6	4	12	18	32	48
Figur 36	2018-19 UEFA	Kubisk - spegling	24	4	6	0	0	6	8	12
Figur 37	2018 Bend-it	Kubisk - spegling	24	3	8	0	0	8	6	12
Figur 38	2006 Teamgeist	Kubisk - 90° rot - spegling	12	4	6	6	8	14	24	36
Figur 40	Volleyboll Flisatec	Kubisk - 90° rot - spegling	12	5	12	2	6	18	32	48
Figur 42	1970 Telstar	Dodekaeder	120	5	12	6	20	32	60	90
Figur 43	Huybers patent	Dodekaeder	120	5	12	6	20	32	60	90
Figur 44	2019 Madrid	Dodekaeder	120	5	12	6	20	32	60	90
Figur 44	2019 Madrid replica	Dodekaeder	120	5	12	3	20	32	30	60
Figur 45	2018 Mitre Delta Leg.	Dodekaeder	120	3	20	0	0	20	12	30
Figur 46	2017 Nike Odem	Dodekaeder	120	5	12	0	0	12	20	30
Figur 47	2018 Swerve Ball	Dodekaeder	120	5	12	6	60	72	140	210
Figur 48	Isodistant skev dode.	Dodekaeder - spegling	60	5	12	3	20	32	60	90
Figur 49	Skev dodekaeder	Dodekaeder - spegling	60	3	80	5	12	92	60	150
Figur 49	Skev tetraeder	Tetraeder - spegling	12	3	28	0	0	28	16	42
Figur 54	Telstar 18-lik tetra.	Tetraeder - spegling	16	3	4	4	12	16	20	30
Figur 54	Brazuca-lik tetra.	Tetraeder - spegling	12	1	4	0	0	4	4	6
Figur 50	Rombisk 30-siding	Dodekaeder	120	30	4	0	0	30	32	60
Figur 55	Brazuca-lik dodeka.	Dodekaeder - spegling	60	5	12	0	0	12	20	30
Figur 57	Telstar 18-lik dode.	Dodekaeder - spegling	60	5	12	4	30	42	80	120

^[1] Puma Evopower har 6 olika sorters paneler, 2 stycken med 2 kanter, 4 med 8 kanter, 4 med 5 kanter, 8 med 5 kanter, 2 med 6 kanter och 2 med 6 kanter.

^[2] Denna boll har också 12 paneler med 4 kanter.



Författaren